Aula 8 (van-Kampen III)

Teorema: (Seifert - van Kampen)

Se $X = U \cup V$ com $U, V, U\cap V$ conexo por caminhos

$$\Rightarrow \quad \pi_1(X,x) \cong \frac{\pi_1(U,x) * \pi_1(V,x)}{\overline{i_\# \pi_1(U\cap V,x)}} = \pi_1(U) \underset{C}{*} \pi_1(V)$$

onde

- $i_\# \pi_1(U\cap V, x) \equiv C = \left\{ i_{U\#}([\alpha])\, i_{V\#}([\alpha])^{-1} \;\middle|\; [\alpha] \in \pi_1(U\cap V, x) \right\}$
- $\overline{C}$ = menor subgrupo normal de $\pi_1(U,x) * \pi_1(V,x)$ que contém C

~~OBS: Demonstrações Alternativas:~~

~~1) Mostrar direto que $\pi_1(X,x)$ é pushout~~

~~$\Leftrightarrow \exists!\; \pi_1(X,x) \longrightarrow \pi_1(U) \underset{C}{*} \pi_1(V)$ (Fazendo diagrama comutar)~~

~~$\Leftarrow \pi_1(X,x) \cong \pi_1(U) \underset{C}{*} \pi_1(V)$ Daqui sai único ψ~~

~~2)~~

Notação: • $a \underset{U}{\sim} b$, $a \underset{V}{\sim} b$, $a \underset{U\cap V}{\sim} b$, $a \underset{X}{\sim} b$ (homotopias relativas)

• $[a]_U$, $[a]_V$, $[a]_{U\cap V}$, $[a]_X$

$$\Rightarrow \quad i_{U\#}[a]_{U\cap V} = [a]_U \quad \dots$$

$$j_{U\#}[a]_U = [a]_X$$

• Produto em $\pi_1(U, x)$

$$[a]_U \cdot [b]_U = [a \cdot b]_U$$

• Produto em $\pi_1(U) * \pi_1(V)$

$$[a]_U * [b]_U * [c]_V = [ab]_U * [c]_V$$

<u>Dem</u>: Considere $\Phi : \pi_1(U) * \pi_1(V) \longrightarrow \pi_1(X)$

$$\Phi\left([a_1]_U * [a_2]_V * [a_3]_U \cdots * [a_m]_V\right) =$$

$$= [a_1 a_2 \cdots a_m]_X$$

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1(U) \arrow[d] \arrow[dr] & \\
\pi_1(U \cap V) \arrow[ur] \arrow[dr] & \pi_1(U) * \pi_1(V) \arrow[r, "\Phi"] & \pi_1(X) \\
 & \pi_1(V) \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Vou mostrar que:

(1) Φ é sobrejetor

(2) $\bar{C} \subset \ker \Phi$

(3) $\ker \Phi \subset \bar{C}$

$$\Rightarrow \quad \pi_1(X) \cong \pi_1(U) \underset{\bar{C}}{*} \pi_1(V)$$

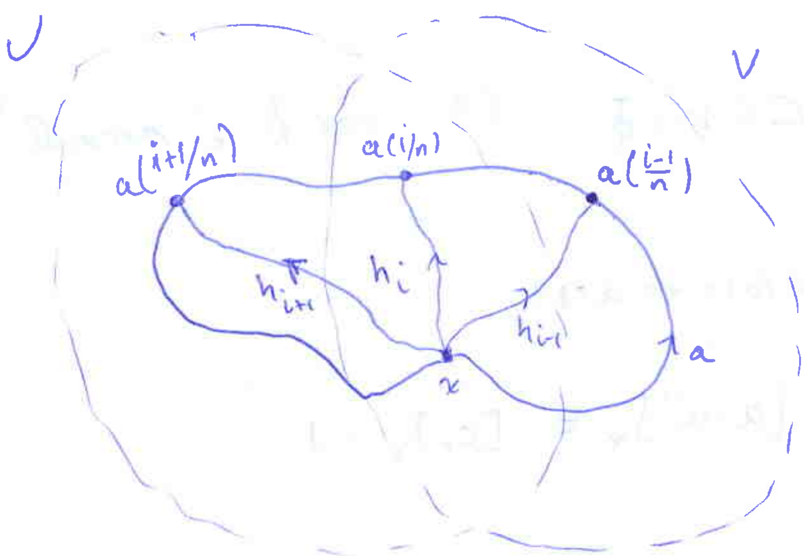
(1) Φ é sobrejetor:

Seja $a: I \longrightarrow X$, $a(0) = x = a(1)$

Pelo Lema do número de Lebesgue, podemos escolher $n \in \mathbb{N}$ grande o suficiente tal que

$$a\left(\left[\tfrac{i-1}{n}, \tfrac{i}{n}\right]\right) \subset U \text{ ou } V \qquad \forall i = 1, \dots, n$$

(aqui usa que U & V são abertos)



Para cada i, seja $h_i: I \longrightarrow X$ uma curva ligando x à $a(i/n)$ tal que

- $h_i(I) \subset U$ se $a(i/n) \in U$
- $h_i(I) \subset V$ se $a(i/n) \in V$
- $h_i(I) \subset U \cap V$ se $a(i/n) \in U \cap V$
- $h_i = c_x$ se $a(i/n) = x$

Aqui usa que $U, V, U \cap V$ conexo por caminhos

Seja $a_i: I \longrightarrow X$, $a_i(s) = a\left(\frac{i-1}{n} + \frac{s}{n}\right)$ (Reparametrização de $a|_{\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]}$)

$\tilde{a}_i = h_{i-1} \cdot a_i \cdot h_i^{-1}$ (laço em X)

Então

$$[a]_X = [\tilde{a}_1 \cdot \tilde{a}_2 \cdot \ldots \cdot \tilde{a}_n]_X = \Phi([\tilde{a}_1]_U * \cdots * [\tilde{a}_n]_V)$$

U ou V escolhido
se $\tilde{a}_i \subset U$ ou V

$\Rightarrow \Phi$ é sobrejetor.

(2) $\bar{C} \subset \ker \Phi$:

Basta mostrar que $C \subset \ker \Phi$ (Pois $\ker \Phi$ é normal)

Seja $a : I \to U \cap V$, $a(0) = x = a(1)$

$\Rightarrow \Phi([a]_U * [a]_V^{-1}) = [a \cdot a^{-1}]_X = [c_x]_X = 1$

$\Rightarrow C \subset \ker \Phi$

(3) $\ker \Phi \subset \bar{C}$

Seja $\alpha = [a_1]_U * [a_2]_V * \cdots * [a_k]_V \in \pi_1(U,x) * \pi_1(V,x)$

e suponha que $\alpha \in \ker \Phi$, ou seja, temos

$$H : I \times I \longrightarrow X$$

$H(s,0) = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_k$

$H(s,1) = x \quad \forall s$

$H(0,t) = H(1,t) = x \quad \forall t$

$\left(a_1 \cdots a_k \sim c_x \text{ em } X \right)$

Pelo Lema de Lebesgue, podemos subdividir $I \times I$ em ⑤

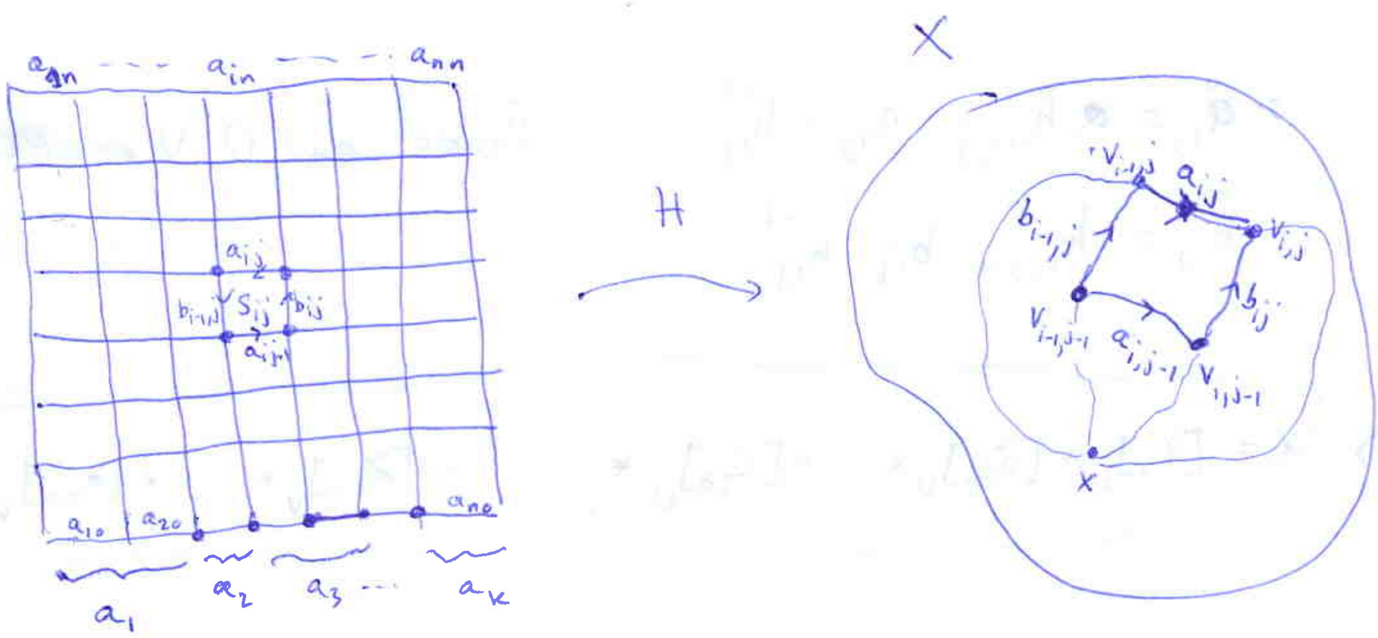
$$S_{ij} = \left[\tfrac{i-1}{n}, \tfrac{i}{n}\right] \times \left[\tfrac{j-1}{n}, \tfrac{j}{n}\right]$$

t.q. $H(S_{ij}) \subset U$ ou V (U, V abertos!)

Além disso, tomando $n = 2^N$, podemos assumir que no produto

$$a_1 \cdots \cdots a_n$$

Os ~~vértices~~ extremos de a_i correspondem à vértices de S_{i0}



Denote por:

- a_{ij} (reparametrização) de $H\big|_{\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right] \times \{j/n\}}$ (Horizontais)

- b_{ij} " " $H\big|_{\{i/n\} \times \left[\frac{j-1}{n}, j/n\right]}$ (verticais)

- $V_{ij} = H\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right)$

Temos:

$$H_0 \sim a_1 \cdots a_k \sim (a_{10} \cdots a_{q0}) \cdot (a_{q+1,0} \cdots a_{q+\ell,0}) \cdot \cdots (a_{r0} \cdots a_{n0})$$

ou seja

$$\alpha = [a_{10} \cdots a_{q0}]_U * \cdots * [a_{r0} \cdots a_{n0}]_V$$

Seja: • $h_{ij} : I \longrightarrow X$ $\quad h_{ij}(0) = x, \quad h_{ij}(1) = v_{ij}$

$h_{ij} \subset U, V, U \cap V$ se $v_{ij} \in U, V$ ou $U \cap V$

$h_{ij} = c_x$ se $v_{ij} = x$

• $\tilde{a}_{ij} = h_{i-1,j} \cdot a_{ij} \cdot h_{ij}^{-1}$ $\quad$ laços em U, V

$\tilde{b}_{ij} = h_{i,j-1}\, b_{ij}\, h_{ij}^{-1}$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha = [\tilde{a}_{10}]_U * [\tilde{a}_{20}]_U * \cdots * [\tilde{a}_{q0}]_U * \cdots\cdots * [\tilde{a}_{r0}]_V * \cdots * [a_{n0}]_V}$$

Ideia: módulo $\bar{C}$ (à menos de trocar $[\tilde{a}_{ij}]_U$ por $[\tilde{a}_{ij}]_V$ se $\tilde{a}_{ij} \subset U \cap V$)

temos que $\alpha = [\tilde{a}_{11}]_U * \cdots * [\tilde{a}_{n1}]_V$

(Expressão análoga obtida por H restrito à uma linha acima, mas trocando se preciso U com V)

Assim, por indução, temos que

$$\alpha = [\tilde{a}_{1n}]_U * \cdots * [\tilde{a}_{nn}]_V \mod \bar{C}$$

$$= \perp \mod \bar{C}$$

$$\Rightarrow \alpha \in \bar{C}$$

Passo indutivo:

Suponha que $\alpha = [\tilde{a}_{1,j-1}]_U * \cdots * [\tilde{a}_{n,j-1}]_V \mod \bar{C}$

queremos mostrar que

$$\alpha = [\tilde{a}_{1,j}]_U * \cdots * [\tilde{a}_{n,j}]_V \mod \bar{C}$$

(possivelmente trocando alguns U por V)

Lema: Se $\gamma \subset U \cap V$ é laço em x $\Rightarrow$ $[\gamma]_U \mod \bar{C} = [\gamma]_V \mod \bar{C}$

- Suponha que $\gamma \subset U \cap V$ laço

$$\Rightarrow [\gamma]_V \mod \bar{C} = ([\gamma]_U * [\gamma]_U^{-1}) * [\gamma]_V \mod \bar{C}$$

$$= [\gamma]_U * \underbrace{([\gamma]_U^{-1} * [\gamma]_V)}_{\in C} \mod \bar{C}$$

$$= [\gamma]_U \mod \bar{C}$$

Considere o quadrado S_{ij}, suponha S.P.G. $H: S_{ij} \longrightarrow V$

H dá uma homotopia entre

$$a_{i,j-1} \underset{V}{\simeq} b_{i-1,j} \cdot a_{ij} \cdot b_{ij}^{-1}$$

$$\Rightarrow \tilde{\alpha}_{i,j-1} = h_{i,j-1} \cdot a_{i,j-1} \cdot h_{ij-1}^{-1} \underset{V}{\simeq} h_{i-1,j-1} \, \underset{h.h^{-1}}{b_{i-1,j}} \, a_{ij} \, \underset{h.h^{-1}}{b_{ij}^{-1}} \, h_{ij-1}$$

$$\underset{V}{\simeq} \tilde{b}_{i-1,j} \, \tilde{a}_{ij} \, \tilde{b}_{ij}^{-1}$$

- Se no produto livre aparece

$$[\tilde{a}_{i,j-1}]_U \,, \quad \text{mas } H: S_{ij} \longrightarrow V$$

$\Rightarrow \tilde{\alpha}_{i,j-1} \subset U \cap V$ e trocamos por $[\tilde{\alpha}_{i,j-1}]_V$

(e vice-versa)

$$\alpha = [\alpha_{1,j-1}]_U * [\alpha_{2,j-1}]_U * \cdots * [\alpha_{n,j-1}]_V \overset{\text{mod } \bar{C}}{=}$$

troquei $U \leftrightarrow V$ $\quad ([\tilde{b}_{1j}]_V * [\tilde{\alpha}_{2j}]_V * [\tilde{b}_{3j}]_V^{-1})$

$$\Rightarrow \alpha \underset{\text{mod } \bar{C}}{=} (\underbrace{[\tilde{b}_{0j}]_U}_{c_x} * [\tilde{\alpha}_{1j}]_U * [\tilde{b}_{1j}]_U^{-1}) * \cdots * ([\tilde{b}_{n-1,j}]_V * [\tilde{a}_{n,j}]_V * \underbrace{[b_{n,j}]_V^{-1}}_{c_{x_0}})$$

$$= [\tilde{\alpha}_{1j}]_U * \cdots * [\tilde{\alpha}_{nj}]_V \quad \text{mod } \bar{C}$$

$\blacksquare$