Aula 7 (van Kampen II)

Lembre que:

Teorema (Seifert - van Kampen)

Se $U, V, U \cap V$ são abertos conexos por caminhos

$\Rightarrow$

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1(U,x) \arrow[dr, "j_{U\#}"] & \\
\pi_1(U \cap V, x) \arrow[ur, "i_{U\#}"] \arrow[dr, "i_{V\#}"'] & & \pi_1(X,x) \\
 & \pi_1(V,x) \arrow[ur, "j_{V\#}"'] &
\end{tikzcd}$$

é pushout de grupos

Push out : "Melhor" preenchimento do diagram

$$\begin{tikzcd}
 & G_1 \arrow[dr, "\psi_1"] \arrow[drr, bend left, "\varphi_1"] & & \\
N \arrow[ur, "\phi_1"] \arrow[dr, "\phi_2"'] & & G \arrow[r, dashed, "\exists!\,\psi"] & H \\
 & G_2 \arrow[ur, "\psi_2"'] \arrow[urr, bend right, "\varphi_2"'] & &
\end{tikzcd}$$

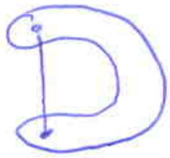
CASO A: $G_1 = G_2 = \{1\} \Rightarrow G = \{1\}$

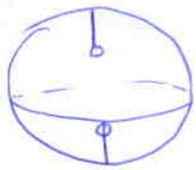
Aplicação: $\pi_1(S^n, p) = \{1\} \quad \forall\, n \geq 2$

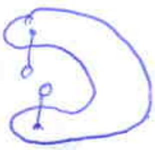
CASO B: $N = G_2 = \{1\} \Rightarrow G \cong G_1$

Applicação: $\pi_1(M - q, p) = \pi_1(M, p)$ M variedade, dim $M \geq 3$

Exemplo $\pi_1(X,p)$ $X=$ 

$U=$  $\underset{h.e.}{\simeq} S^1$

$V=$  $\underset{h.e.}{\simeq} S^2$

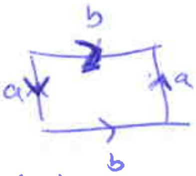
$U\cap V=$  $\underset{h.e.}{\simeq} \{pt\}$

$\Rightarrow \pi_1(X,p)=\mathbb{Z}$

CASO C: $G_2=\{1\} \Rightarrow G\cong \dfrac{G_1}{\phi_1(N)}$ onde $\overline{\phi_1(N)}$ é o menor subgrupo normal de G_1 que contém $\phi_1(N)$

⊛ Applicação: Se $X = A\cup_\chi D^2$ onde $\chi : S^1=\partial D^2 \longrightarrow A$

$\Rightarrow$ ~~R.~~ $i:(A,a)\longrightarrow(X,a)$ induz $i_\# : \pi_1(A,a)\to\pi_1(X,a)$ sobrejetor com $\ker i_\# = \langle\langle[\chi(\gamma_1)]\rangle\rangle$ $\gamma_1=e^{2\pi i s}$

Exemplo: $K=$ 

$\pi_1(K,p)=\dfrac{\pi_1(S^1\vee S^1)}{\langle abab^{-1}\rangle}$

Dem (Aplicação $*$):

Exercício: Mostre que $A \hookrightarrow X \setminus \{0\}$ é retrato por deformação. $r : X - \{0\} \longrightarrow A$

$$r(x) = \begin{cases} \chi\left(\frac{x}{\|x\|}\right) & x \in \mathring{D} \\ x & x \in A \end{cases}$$

Seja $x \in \mathring{D}^2$, $x \neq 0$
$(x = (\frac{1}{2}, 0))$

Tomamos $U = X - \{0\} \underset{h.e.}{\simeq} A$

$V = \mathring{D}^2 \underset{h.e.}{\simeq} \{pt.\}$

$U \cap V = \mathring{D}^2 - \{0\} \underset{h.e.}{\simeq} S^1 = \partial D^2$

$r(x) = \frac{x}{\|x\|}$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{ccccc} & & \pi_1(U, x) & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ \pi_1(U \cap V, x) & & & & \pi_1(X, x) \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & \{1\} & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} \pi_1(U \cap V, x) & \xrightarrow{i_\#} & \pi_1(X - \{0\}, x) & \longrightarrow & \pi_1(X, x) \\ r_\# \big\downarrow \wr & & r_\# \big\downarrow \wr & & \big\downarrow \wr \\ \pi_1(S^1, 1) & \xrightarrow[\chi_\#]{} & \pi_1(A, a) & \longrightarrow & \pi_1(X, a) \end{array}$$

$a = \chi(1) = \chi(r(x))$

CASO D: $N = \{1\} \Rightarrow G \cong G_1 * G_2$

Um Pouco de álgebra:

Considere G_1, G_2 como conjuntos disjuntos

Def: Um palavra em G_1 e G_2 é uma sequencia

$$W = (g_1)(g_2) \cdots (g_n) \quad \text{onde} \quad g_i \in G_1 \sqcup G_2$$

$$w_\phi = (\ ) \quad \text{(palavra vazia)}$$

Dados w, w' palavras obtemos ww'

$$ww' = (g_1) \cdots (g_n)(g_1') \cdots (g_m')$$

Def: Uma palavra w é reduzida se

(1) $g_i \neq 1_{G_1}$, $g_i \neq 1_{G_2}$ $\forall i$

(2) g_i & g_{i+1} não pertencem ao mesmo grupo

Processo de redução de Palavras:

(1) se $g_i = 1 \rightsquigarrow$ deleta (g_i) ~~da~~ palavra

(2) Se $g_i, g_{i+1} \in G_1$ ou $g_i g_{i+1} \in G_2$

$$(g_1) \cdots (g_i)(g_{i+1}) \cdots (g_n) \rightsquigarrow (g_1) \cdots (g_i g_{i+1}) \cdots (g_n)$$

Aplicando (1) & (2) até ficar reduzido:

$$W \rightsquigarrow W_{red}$$

Def: $G_1 * G_2 = \{ w = (g_1)\cdots(g_n) \mid w$ é palavra reduzida em G_1 e $G_2 \}$

- Produto: $w \cdot w' = (ww')_{red}$
- Elmt. Neutro: $w_\phi = (\ )$
- Inversa $w^{-1} = (g_n^{-1})(g_{n-1}^{-1}) \cdots (g_1^{-1})$

Exercício: Mostre que $G_1 * G_2$ é um grupo.

OBS: Obtemos

$$\varphi_1 : G_1 \longrightarrow G \qquad \varphi_i(g) = (g) \quad \varphi_i(1) = (\ )$$
$$\varphi_2 : G_2 \longrightarrow G$$

Homomorfismos.

Prop:

$$\begin{tikzcd}
 & G_1 \arrow[dr, "\varphi_1"] \arrow[rrd, bend left, "\varphi_1"] & & \\
\{1\} \arrow[ur] \arrow[dr] & & G_1 * G_2 \arrow[r, dashed, "\exists!\,\varphi"] & H \\
 & G_2 \arrow[ur, "\varphi_2"] \arrow[rru, bend right, "\varphi_2"'] & &
\end{tikzcd}$$

é pushout

$$\psi(\underbrace{(g_1)}_{G_1}\underbrace{\cdots}_{G_2}(g_n)) = \varphi_1(g_1)\varphi_2(g_2)\varphi_1(g_3)\cdots\varphi_i(g_n) \qquad i = 1 \text{ ou } 2$$

Aplicação: se $\pi_1(U \cap V) = \{1\} \Rightarrow \boxed{\pi_1(X, x) \cong \pi_1(U, x) * \pi_1(V, x)}$

Mais um pouco de álgebra: (Geradores e Relações)

Seja S um conjunto.

$$F(S) = \text{grupo livre gerado por } S = \left\{ a_{s_1}^{n_1} \cdot \ldots \cdot a_{s_k}^{n_k} \;\middle|\; \begin{array}{l} s_i \neq s_{i+1}, \\ s_i \in S \\ n_i \in \mathbb{Z} \\ n_i \neq 0 \end{array} \right\}$$

grupo com operação

relações $\begin{cases} a_s \cdot a_s = a_s^2 \\ a_s^0 = 1 = \phi \end{cases}$ + produto por justaposição

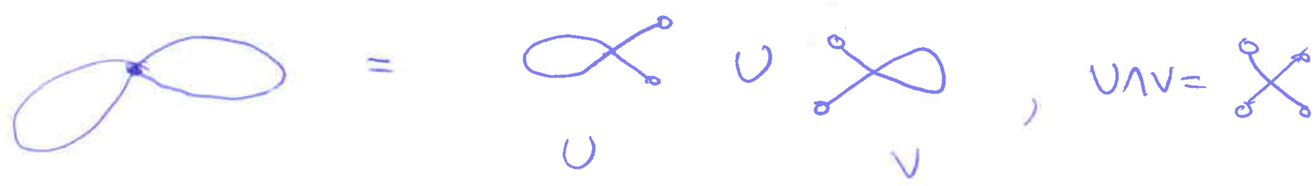
Exemplo: • $S = \{a\} \Rightarrow F(S) \cong \mathbb{Z}$

$$a^n \longmapsto n$$

• $S = (a_1, a_2) \Rightarrow F(a_1, a_2) \cong F(a_1) * F(a_2) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$

Em geral $F(a_1, \ldots, a_n) = F(a_1) * F(a_2) * \cdots * F(a_n)$

Exemplo: $\pi_1(S^1 \vee S^1, p) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z} = \langle a, b \rangle$



Note que:

$$\pi_1(T, p) = \frac{\langle a, b \rangle}{\langle aba^{-1}b^{-1} \rangle} \quad \text{ou seja:} \quad \begin{array}{l} \text{2-geradores } \{a, b\} \\ \& \\ ab = ba \quad (\text{comutam}) \end{array}$$

$$\Rightarrow \pi_1(T, p) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

Relações:

Seja $R \subset F(S)$. Denote por $\langle R \rangle \subset F(S)$ o menor subgrupo normal de $F(S)$ contendo R e considere

$$F(S)/\langle R \rangle \qquad \text{(Grupo dado por geradores e relações)}$$

e.g. $$(\mathbb{Z}^2, +) \cong \frac{\overbrace{\langle a, b \rangle}^{F(a,b)}}{\langle aba^{-1}b^{-1} \rangle} \underset{\text{exercício}}{\cong} \frac{\langle a, b, c \rangle}{\langle aba^{-1}c,\ bc \rangle}$$

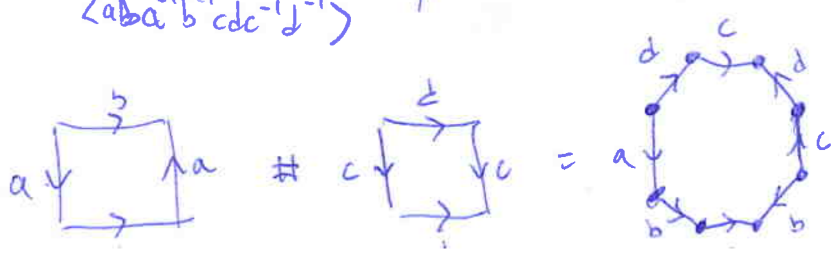
OBS: Todo grupo pode ser descrito em termos de geradores & relações

$$\boxed{G = \frac{F(G)}{\langle a_g a_h a_{gh}^{-1},\ a_g^{-1} = a_{g^{-1}} \rangle}}$$

mas em geral, o ~~probl~~ não é possível determinar se 2 grupos dados por geradores e relações são isomorfos.
~~existem algumas~~

Exemplo: $$\pi_1(T \# T, p) \cong \frac{\langle a, b, c, d \rangle}{\langle aba^{-1}b^{-1}cdc^{-1}d^{-1} \rangle} = \frac{\langle a, b, c, d \rangle}{\langle abab^{-1}cdc^{-1}d^{-1} \rangle}$$

$\pi_1(K \# T^2, p) = ?$



Caso Geral:

Se $\quad N = F(S)/\langle R\rangle \,, \quad G_1 = F(S_1)/\langle R_1\rangle \,, \quad G_2 = F(S_2)/\langle R_2\rangle$

$$\Rightarrow \quad G \cong \frac{F(S_1 \sqcup S_2)}{\langle R_1 \sqcup R_2 \sqcup R' \rangle} \qquad \text{onde}$$

- $\phi_1(s \bmod \langle R\rangle) = a_s \bmod \langle R_1\rangle$
- $\phi_2(s \bmod \langle R\rangle) = b_s \bmod \langle R_2\rangle$
- $R' = \{ a_s b_s^{-1} \mid s \in S \} \subset F(S_1 \cup S_2)$

Equivalentemente

$$G \cong \frac{G_1 * G_2}{\phi(N)} = \frac{G_1 * G_2}{\langle \phi(N) \rangle}$$

onde $\phi(N) = \{ \phi_1(n)\phi_2(n)^{-1} \mid n \in N \}$

Dem:

$$\begin{tikzcd}
 & G_1 \arrow[dr, "\psi_1"] \arrow[rrd, bend left, "\psi_1"] & & \\
N \arrow[ur, "\phi_1"] \arrow[dr, "\phi_2"'] & & \frac{G_1 * G_2}{\langle \phi(N) \rangle} \arrow[r, dashed, "\exists! \psi"] & H \\
 & G_2 \arrow[ur, "\psi_2"'] \arrow[rru, bend right, "\psi_2"'] & &
\end{tikzcd}$$

$$\psi([g_1] \cdots [g_n]) = \psi_1(g_1)\,\psi_2(g_2)\,\psi_1(g_3) \cdots$$

Ou seja

$$\pi_1(X,x) \cong \frac{\pi_1(U,x) * \pi_1(V,x)}{\langle i_{\#}\pi_1(U\cap V,x)\rangle}$$

(Produtos de laços em U com laços em V onde identificamos

$i_{U\#} : \pi_1(U\cap V,x) \to \pi_1(U,x)$

com

$i_{V\#} : \pi_1(U\cap V,x) \to \pi_1(V,x)$)