Aula 5 (Recobrimento Universal)

Revisão :

- Recobrimento : $p: E \to B$, $\forall b \in B$, $\exists\, \underset{b\in}{U} \subset B$ t.q.

$$p^{-1}(U) = \coprod_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda \qquad (\Lambda \neq \emptyset) \quad ; \quad p|_{V_\lambda} : V_\lambda \to U \text{ é homeo.}$$

- Se E é 1-conexo, $G \circlearrowright E$ prop. descontínua, $B = E/G$

$$\Rightarrow \quad \pi_1(B,b) \cong G$$

OBS: Nesse caso, usando o $\cong$, obtemos ação prop. desc. $\pi_1(B,b) \circlearrowright E$

- Pergunta: É verdade que todo espaço topológico B, pode ser obtido como $E/\pi_1(B,b)$, onde E é 1-conexo & ação prop. descontínua?

Para responder....

Vamos usar: Dado $f: X \to B$, (X, ~~conexo~~ E, B conexo por caminhos)

$\exists\ \tilde{f} : X \to E$ levantamento $(\tilde{f}(x) = e)$

$$\Leftrightarrow \quad f_\#(\pi_1(X,x)) \subset p_\#(\pi_1(E,e))$$

Nesta aula todos os espaços são conexos por caminhos

Correção : Localmente conexo por caminhos: ($\not\Rightarrow$ conexo por caminhos)

$\forall x \in X$, $\forall\, \underset{x\in}{U} \subset X$, $\exists\, \underset{x\in}{V} \subset U \subset X$, com V conexo por caminhos

Prop: Sejam $E_1 \xrightarrow{p_1} B$, $E_2 \xrightarrow{p_2} B$ recobrimentos.

Se

$$\begin{tikzcd} & E_2 \arrow[d, "p_2"] \\ E_1 \arrow[ur, "\tilde{p}_1"] \arrow[r, "p_1"'] & B \end{tikzcd}$$

$\tilde{p}_1$ levantamento de p_1

$\Rightarrow$ $\tilde{p}_1 : E_1 \longrightarrow E_2$ é um recobrimento.

Dem: Seja $e_2 \in E_2$. Precisamos mostrar que e_2 admite vizinhança unif. recoberta

- Seja $b = p_2(e_2)$. Se $U \subset B$ aberto uniforme de b para p_1 & p_2. (Basta tomar $U_1 \cap U_2$)

- Seja W a folha de p_2 sobre U contendo e_2 e

$$\bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda = p_1^{-1}(U).$$

$$\Rightarrow \tilde{p}_1^{-1}(W) \subset \tilde{p}_1^{-1}(p_2^{-1}(U)) = p_1^{-1}(U)$$

$$\Rightarrow \tilde{p}_1^{-1}(W) = \bigsqcup_{\alpha \in A} V_\alpha, \quad \text{onde cada } A \subset \Lambda$$

mas $\tilde{p}_1\big|_{V_a} : V_a \xrightarrow{\ } W$, $\tilde{p}_1\big|_{V_a} = p_2\big|_W^{-1} \circ p_1\big|_{V_a}$ Homeo! ■

<u>Corolário</u>: Se $p: E \to B$ é um recobrimento com E 1-conexo, e $p': E' \to B$ é um recobrimento qualquer.

$\Rightarrow \exists\ \tilde{p}: E \to E'$ recobrimento

<u>Dem</u>: $\underbrace{p_\# \pi_1(E,e)}_{\{1\}} := \{1\} \subset p'_\#(\pi_1(E',e))$ pois

$$\begin{tikzcd} & E' \arrow[d, "p'"] \\ E \arrow[ur, dashed, "\exists \tilde{p}"] \arrow[r, "p"'] & B \end{tikzcd}$$

■

<u>Exercício</u>: Mostre que se

$$\begin{tikzcd} E \arrow[d, "\tilde{p}"] \\ E' \arrow[d, "p'"] \\ B \end{tikzcd}$$

recobrimentos

$\Rightarrow p' \circ \tilde{p}$ é recobrimento

<u>Prop</u>: Se E_1 e E_2 são recobrimentos 1-conexos de B

$\Rightarrow E_1 \cong E_2$ (homeo)

<u>Dem</u>: Sabemos que existe $\tilde{p}_1: E_1 \to E_2$ homeo local. sobrejetor

Basta mostrar que $\tilde{p}_{1*}$ é injetor

Mas $\tilde{p}_1^{-1}(e_2) \xleftrightarrow{1-1} \dfrac{\pi_1(E_2,e_2)}{\pi_1 \cdots} = \{1\} \Rightarrow$ Injetor ■

OBS.: O que provei foi que ~~qualquer~~ $\forall$ recobrimento $p: E \to B$, com E conexo por caminhos e B 1-conexo $\Rightarrow$ p é homeo.

Def: Um recobrimento universal de X, denotado por $\tilde{X} \xrightarrow{p} X$, é um recobrimento com $\tilde{X}$ 1-conexo. ~~(Único à menos de homeo~~

OBS: Único à menos de Homeo (quando existe)

Def: X é semi-localmente ~~simples~~ simplesmente conexo se $\forall x \in X$, $\exists\, U \subset X$, $x \in U$, t.q. $\forall \gamma \in \Omega(U, x)$

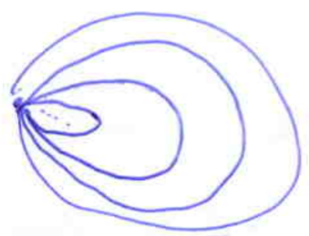
$\gamma \sim c_x$ (Homotopia em X)

EQUIVALENTE: $\pi_1(U) \xrightarrow{i_\#} \pi_1(X)$ é trivial

(OBS: NÃO Depende do Pto Base)

NÃO

Contra-Exemplo



OBS: Suponha que $E \xrightarrow{p} B$ é recobrimento com E 1-conexo.

~~Dado U~~ Se $U \subset B$ é uniformemente recoberto

$\Rightarrow \forall\, \alpha \in \Omega(U, b)$, o levantamento $\tilde{\alpha}_e = p|_{V_e}^{-1} \circ \alpha$

é um laço $\tilde{\alpha} \in \Omega(E, e) \Rightarrow \tilde{\alpha} \sim c_e$

$\Rightarrow \alpha \sim c_b$ (como um laço em B).

Ou seja: B é semi-localmente ~~conexo~~ simplesmente conexo.

OBS: Se $E \xrightarrow{p} B$ é recobrimento universal

$\Rightarrow$ Fixa $b_0 \in B$, $e_0 \in p^{-1}(b)$, $E \overset{\text{(homeo)}}{\cong} \tilde{B} = \underbrace{\{[\gamma] \mid \gamma(0) = b_0\}}$

homotopia rel ∂I

Vou explicar a topologia à seguir

Só envolve B!

$$\boxed{\begin{aligned} \psi : \tilde{B} &\to E \\ [\gamma] &\mapsto \tilde{\gamma}_{e_0}(1) \end{aligned}}$$

- bem definido: pois $\gamma \sim \alpha \Rightarrow \tilde{\gamma}_e \sim \tilde{\alpha}_e$
- injetor: pois $\tilde{\gamma}_e(1) = \tilde{\alpha}_e(1) \Rightarrow \tilde{\gamma}_e \sim \tilde{\alpha}_e \Rightarrow \gamma \sim \alpha$

1-conexo

- Sobrejetor:

pois Dado e^*, $\exists\, \tilde{\gamma} : I \to E$, $\tilde{\gamma}(0) = e_0$, $\tilde{\gamma}(1) = e$

conexo por caminhos

$\Rightarrow \psi([p \circ \tilde{\gamma}]) = \gamma(1) = e$.

Teorema: Se B é um espaço topológico conexo por caminhos, localmente conexo por caminhos, semi-localmente simplesmente conexo

$\Rightarrow$ B admite recobrimento universal.

Dem: Seja $\tilde{B} = \{ [\gamma] \mid \gamma : I \to B,\ \gamma(0) = b_0 \}$ e

fixa $b_0 \in B$

$[\gamma]$ = classe de homotopia rel ∂I

$$p : \tilde{B} \to B$$
$$p([\gamma]) = \gamma(1)$$

~~Afirmação~~ Seja $\mathcal{U} = \{ U \subset B \mid \pi_1(U) \to \pi_1(B)$ é trivial $\}$

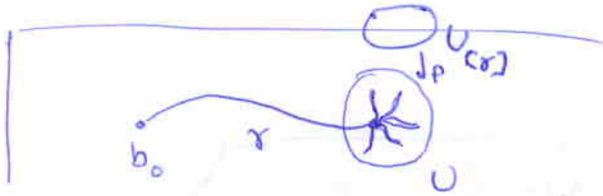
U conexo por caminhos

afirmação 1: $\mathcal{U}$ é uma base da topologia de B

De fato: Se $V \subset U$, $\pi_1(V) \to \pi_1(U) \to \pi_1(X)$

é trivial

$\Rightarrow V \in \mathcal{U}$.



Topologia de $\tilde{B}$:

Seja

$$\boxed{U_{[\gamma]} = \{ [\gamma * \eta] \mid \eta : I \to U,\ \eta(0) = \gamma(1) \}}$$

Afirmação 2: $U_{[\gamma]}$ só depende de $[\gamma]$ (e não de γ)

Pois $\gamma \sim \gamma' \Rightarrow \gamma * \eta \sim \gamma' * \eta$

Afirmação 3: $p: U_{[\gamma]} \longrightarrow U$ é sobrejetor pois U é conexo por caminhos

Afirmação 4: $p: U_{[\gamma]} \longrightarrow U$ é injetor:

De fato, se $p([\gamma * \eta]) = p([\gamma * \eta'])$ $\Rightarrow \begin{cases} \eta(0) = \eta'(0) \\ \eta(1) = \eta'(1) \end{cases} \xrightarrow[\substack{\pi_1(U) \to \pi_1(B) \\ \text{trivial}}]{} \eta \sim \eta'$ em B

$\Rightarrow \gamma * \eta \sim \gamma * \eta'$

Afirmação 5: Se $[\gamma'] \in U_{[\gamma]} \Longrightarrow U_{[\gamma]} = U_{[\gamma']}$

De fato: Se $\gamma' = \gamma * \eta \Rightarrow$ • $U_{[\gamma']} = \{[(\gamma * \eta) * \mu]\} = \{[\gamma * (\eta * \mu)]\}$
$\subseteq U_{[\gamma]}$

• $U_{[\gamma]} = \{[\gamma * \mu]\} = \{[\gamma * \eta * \bar{\eta} * \mu]\}$
$= \{[\gamma' * (\bar{\eta} * \mu)]\} \subset U_{[\gamma']}$

Afirmação 6: $\tilde{\mathcal{U}} = \{U_{[\gamma]}\}$ formam uma base para uma topologia em $\tilde{B}$ (Dados $U_{[\gamma]} \cap V_{[\gamma']} \neq \phi$, $\underset{[\gamma'']}{\ni}$ $\Rightarrow \exists\, W_{[\gamma'']} \subset U_{[\gamma]} \cap V_{[\gamma']}$)

De fato: Dado $U_{[\gamma]}, V_{[\gamma']}$ t.q. $[\gamma''] \in U_{[\gamma]} \cap V_{[\gamma']}$

$\Rightarrow U_{[\gamma]} = U_{[\gamma'']}$, $V_{[\gamma']} = V_{[\gamma'']}$

Logo se $W \subset \mathcal{U}$, $W \subset U \cap V$, $\gamma''(1) \in W$

$\Rightarrow W_{[\gamma'']} \subset U_{[\gamma'']} \cap V_{[\gamma'']}$, $[\gamma''] \in W_{[\gamma'']}$

Afirmação 7:

$$p : U_{[\gamma]} \longrightarrow U \quad \text{é homeo}$$

De fato: • p é contínua pois se $V \subset U$, $V \in \mathcal{U}$

$\Rightarrow p^{-1}(V) = V_{[\gamma]} \in \tilde{\mathcal{U}}$

• p é aberto pois

$p(V_{[\gamma]}) = V \in \mathcal{U} \quad \forall \underset{\mathcal{U}_{[\gamma]}}{\underset{\cap}{V_{[\gamma]}}} \in \tilde{\mathcal{U}}$,

Equivalente: Bijeção: $\{V_{[\gamma']} \mid V_{[\gamma']} \in \tilde{\mathcal{U}},\ V_{[\gamma']} \subset V_{[\gamma]}\} \underset{p}{\overset{1-1}{\longleftrightarrow}} \{V \mid V \subset U,\ V \in \mathcal{U}\}$

contínua

aberto

Afirmação 8: $p : \tilde{B} \longrightarrow B$ é recobrimento

pois $B = \bigcup U$, $U \in \mathcal{U}$, $p^{-1}(U) = \bigsqcup U_{[\gamma]}$

União disjunta pois

$$[\gamma''] \in U_{[\gamma]} \cap U_{[\gamma']} \Rightarrow \underbrace{U_{[\gamma]} = U_{[\gamma'']} = U_{[\gamma']}}$$

Ou são iguais e contamos uma vez ou são disjuntos

Afirmação 9: $\tilde{B}$ é conexo por caminhos

De fato: Seja $[\gamma] \in \tilde{B}$, e $\gamma_t : I \to B$

$\gamma_t(s) = \gamma(ts)$

$\Rightarrow t \longmapsto [\gamma_t]$ é uma curva em $\tilde{B}$

$\tilde{\gamma}: t \longmapsto [\gamma_t]$, $\tilde{\gamma}(0) = [c_{b_0}]$

$I \longrightarrow \tilde{B}$ $\quad \tilde{\gamma}(1) = [\gamma]$

$\Rightarrow$ $\boxed{\tilde{B} \text{ é conexo por caminhos}}$

Afirmação 10: $\tilde{B}$ é simplesmente conexo

De fato: Vamos mostrar que $p_\#(\pi_1(\tilde{B}, [c_{b_0}])) = \{1\}$

Mas $p_\#(\pi_1(\tilde{B}, [c_{b_0}])) = \{[\gamma] \in \pi_1(B, b_0) \mid \tilde{\gamma} \in \Omega(\tilde{B}, [c_{b_0}])\}$

ou seja, $\gamma_1(s) = \gamma_0(s) = b_0 \quad \forall s$

Mas então $H: I \times I \longrightarrow B$

$H(s,t) = \gamma_t(s)$

é homotopia entre γ & $[b_0]$

∎

Teorema fundamental da álgebra:

Se $p : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ é um polinômio não constante

$\Rightarrow$ $\exists\, z_0 \in \mathbb{C}$ t.q. $p(z_0) = 0$

Dem: Suponha que $p(z) \neq 0 \quad \forall z$.

Podemo assumir que

$$p(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$$

$\forall\, r \geq 0$, obtemos um laço $f_r : I \longrightarrow S^1$

$$\boxed{f_r(s) = \frac{p(re^{2\pi i s})/p(r)}{|p(re^{2\pi i s})/p(r)|}}$$

Para $r = 0$: $f_0(s) \equiv 1 \quad \forall s$

$$\Rightarrow \quad [f_r(s)] = 0 \in \pi_1(S^1, 1)$$

($H(r,s) = f_r(s)$ é a homotopia)

Seja $r > \max\{|a_1| + \cdots + |a_n|, 1\}$

$\Rightarrow$ Para $|z| = r$ temos

$$|z^n| = r^n = r \cdot r^{n-1} > (|a_1| + \cdots + |a_n|)|z^{n-1}| \geq$$

$$\geq |a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n|$$

Ou seja

$$|z^n| > |a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n|$$

Logo, $P_t(z) = z^n + t(a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n) \neq 0$

$$\forall\, |z| = r \quad , \quad \forall t$$

$\Rightarrow \quad H : I \times I \longrightarrow S^1$

$$H(s,t) = \frac{P_t(re^{2\pi i s})/P_t(r)}{|P_t(re^{2\pi i s})/P_t(r)|}$$

é uma homotopia entre

$$\underset{\substack{\parallel \\ H(s,1)}}{f_r(s)} \quad \& \quad H(s,0) = \frac{z^n/r^n}{|z^n/r^n|} = \frac{z^n}{r^n}$$

Ou seja: depois de compor com o homeo

$$S^1_r \longrightarrow S^1$$

$$re^{2\pi i s} \longmapsto e^{2\pi i s}$$

obtemos que $f_r(s) \sim \gamma_n(s) = e^{2\pi i n s}$

mas $[\gamma_n] = n \in \mathbb{Z}$, $[f_r] = 0 \in \mathbb{Z}$ $\Rightarrow$ Absurdo!