19/08/2015

Teorema (*): $p: E \to B$ recobrimento

1) Unicidade de levantamentos

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d] \\ X \arrow[ur, "\hat{f}"] \arrow[ur, "\tilde{f}"'] \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

, X conexo. Se $\hat{f}(x_0) = \tilde{f}(x_0) \Rightarrow \hat{f} \equiv \tilde{f}$.

2)
$$\begin{tikzcd} X\times\{0\} \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "i"'] & E \arrow[d, "p"] \\ X\times[0,1] \arrow[r, "H"'] \arrow[ur, dashed, "\exists! \tilde{H}"] & B \end{tikzcd}$$

Consequências: • $\forall \alpha: I \to B$, $\alpha(0) = b$, fixa $e \in p^{-1}(b)$
$\Rightarrow \exists! \ \tilde{\alpha}_e: I \to E$, $\begin{cases} p \circ \tilde{\alpha}_e = \alpha \\ \tilde{\alpha}_e(0) = e \end{cases}$

• $\alpha \sim \beta$ rel ∂I
$\Updownarrow$
$\tilde{\alpha}_e \sim \tilde{\beta}_e$ rel ∂I $(\Rightarrow \tilde{\alpha}_e(1) = \tilde{\beta}_e(1))$

Usando isso: Ação à direita de $\pi_1(B,b)$ em $p^{-1}(b)$: $e[\alpha] = \tilde{\alpha}_e(1)$.

- E conexo por caminhos $\Rightarrow$ ação é transitiva
- E é 1-conexo $\Rightarrow$ ação é livre

• Em geral (E conexo por caminhos): $p^{-1}(b) \longleftrightarrow \dfrac{\pi_1(B,b)}{p_\# \pi_1(E,e)} \Big\} \mathrm{Iso}(e)$.

Por fim: $\left.\begin{array}{l} G \circlearrowright E \text{ prop. desc.} \\ B = E/G, \ E \text{ é 1-conexo} \end{array}\right\} \Rightarrow \underbrace{G \circlearrowright p^{-1}(b) \circlearrowleft \pi_1(B,b)}_{\text{comutam}} \Rightarrow \boxed{\pi_1(B,b) \cong G}$

Exemplo: $\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$.

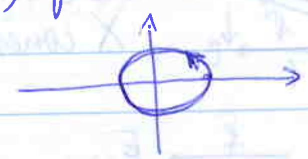
Exercício: Considere $\deg : \pi_1(S^1,1) \to \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$, por $\deg([\alpha]) = \tilde{\alpha}_0(1)$.

$p : t \longmapsto e^{2\pi i t}$

Mostre diretamente que deg é isomorfismo de grupos

Sobre $\pi_1(S^1,1)$

Seja $\gamma_1 : I \to S^1$, com $\gamma_1(0) = \gamma_1(1) = 1$, $\gamma_1(s) = e^{2\pi i s}$



$\deg[\gamma_1] = 1$

$(\tilde{\gamma}_1)_0(s) = s \implies (\tilde{\gamma}_1)_0(1) = 1$

ou seja: $[\gamma_1]$ é um gerador de $\pi_1(S^1,1) = \mathbb{Z}$.

Qualquer outra classe pode ser representada por $[\gamma_n] = [\gamma_1]^n = \underbrace{[\gamma_1]\cdot[\gamma_1]\cdots[\gamma_1]}_{n \text{ vezes}}$

$\gamma_n(s) = e^{2\pi i n s}$

Demonstração do Teorema (*)

(1) Unicidade do levantamento:

$A \subseteq X$, $A = \{x \in X \mid \hat{f}(x) = \tilde{f}(x)\} \neq \emptyset$, pois $x_0 \in A$.

(i) A é aberto

Se $x \in A$, $f(x) \in B$, seja $f(x) \in \mathcal{U} \subseteq B$ aberto uniforme e $V \subseteq E$ folha de p sobre $\mathcal{U}$ contendo $\tilde{f}(x) = \hat{f}(x) \implies$

$\implies \tilde{f}|_{\tilde{f}^{-1}(V)} = p|_V^{-1} \circ f = \hat{f}|_{\hat{f}^{-1}(V)} \implies \tilde{f}^{-1}(V) \subseteq A \implies A$ é aberto.

(ii) $X \setminus A$ é aberto

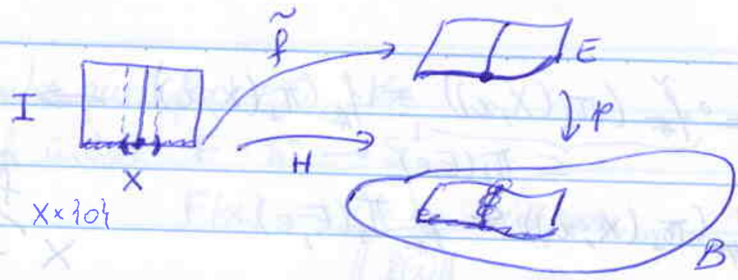
Seja $\mathcal{U}$ como acima, e $\hat{V}, \tilde{V} \subseteq E$ folhas contendo $\hat{f}(x)$ e $\tilde{f}(x)$ respectivamente. Além disso, $\hat{V} \cap \tilde{V} = \emptyset$.

Para x' perto de x, ie, $x' \in \hat{f}^{-1}(\hat{V}) \cap \tilde{f}^{-1}(\tilde{V})$, sabemos que

$\hat{f}(x') = \left(p|_{\hat{V}}\right)^{-1} f(x') \neq \left(p|_{\tilde{V}}\right)^{-1} f(x') = \tilde{f}(x) \implies X \setminus A$ é aberto $\implies$

$\implies X \setminus A = \emptyset \implies X = A$.

(2) Idéia:



Pela unicidade dos levantamentos, basta mostrar que $\forall x \in X$ existe $\overset{x}{\underset{\in}{W}} \subseteq X$ tq $H|_{W\times I}$ admite levantamento.

- Toma uma cobertura $\{W_i \times (a_i, b_i)\}$ de $\{x\} \times I \subseteq X \times I$.
  Tal que $H(W_i \times (a_i,b_i)) \subseteq \mathcal{U}_i$ aberto uniforme
- Como $\{x\} \times I$ é compacto, podemos tomar subrecobertura finita
- $W := \bigcap_{i=1}^{k} W_i$
- (nº de Lebesgue) (a_i, b_i) é cobertura de I, $\exists\, 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$
  Então $\forall j$, $\exists i$ tq $[t_j, t_{j+1}] \subseteq (a_i, b_i)$
- Levantamos H por etapas: $\rightsquigarrow$ para $t \in [0, t_1] \Rightarrow H(x', t) \subseteq \mathcal{U}_1$.
  Seja V_1 a folha que contém $\tilde{f}(x') = \tilde{H}(x', 0)$, defino $\tilde{H}(x', t) = p|_{V_1}^{-1} \circ H(x', t)$.
  Para $t \in [t_1, t_2]$
  Seja $\mathcal{U}_2$ aberto uniforme que contém $H(W, [t_1, t_2])$ e seja V_2 a folha que contém $\tilde{H}(x', t_1)$.
  Defina $\tilde{H}(x', t) = \left(p|_{V_2}\right)^{-1} \circ H(x', t)$, e assim por diante.

Pergunta: Dado $f: X \to B$, existe levantamento? Quando?

Teorema: Se X, E, B são conexos por caminhos e localmente conexos por caminhos*, então $\exists \tilde{f}: X \to E$ $(\tilde{f}(x) = e) \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow f_{\#}(\pi_1(X, x)) \subseteq p_{\#}(\pi_1(E, e))$.

* $\forall x \in X$, $\forall V$ vizinhança de x e $\forall x' \in V$,
$\exists \gamma : I \to W$ tq $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = x'$.

Demonst: ($\Rightarrow$) $\underbrace{p_\# \circ \tilde{f}_\# (\pi_1(X,x))}_{\subseteq \pi_1(E,e)} = f_\#(\pi_1(X,x)) \Longrightarrow$

$\Longrightarrow f_\#(\pi_1(X,x)) \subseteq p_\# \pi_1(E,e)$

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[ur, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

($\Leftarrow$) Definimos $\tilde{f}$ usando levantamento de caminhos.

Seja $\alpha : I \to X$ tq $\alpha(0) = x$, $\alpha(1) = x'$

$f \circ \alpha : I \to B$, $(f \circ \alpha)(0) = b$

$(f \circ \alpha)(1) = b'$ $\quad \widetilde{(f \circ \alpha)}_e$

Defina: $\tilde{f}(x') = \widetilde{(f \circ \alpha)}_e(1)$.

$\tilde{f}$ está bem-definida:

Seja $\beta : I \to X$, $\beta(0) = x$, $\beta(1) = x'$

$\alpha * \beta^{-1} \in \Omega(X,x)$

$f(\alpha * \beta^{-1}) = (f \circ \alpha) * (f \circ \beta^{-1}) \in \Omega(B,b)$

$\underset{\text{rel } \partial I}{\sim} p \circ \gamma$ onde $\gamma \in \Omega(E,e)$.

$\Longrightarrow \widetilde{(f \circ \alpha)}_e * \widetilde{(f \circ \beta^{-1})}_{\widetilde{f \circ \alpha}_e(1)} \sim \gamma$

$\Longrightarrow \widetilde{f \circ \alpha}_e \sim \gamma * \widetilde{(f \circ \beta)}_e \Longrightarrow \widetilde{f \circ \alpha}_e(1) = \widetilde{f \circ \beta}_e(1)$

Exercício: Mostre que $\tilde{f}$ é contínua. $\blacksquare$

Fato: $\pi_1(S^n, 1) = \{1\}$, se $n \geq 2$. $\left(\Rightarrow \pi_1(\mathbb{RP}^n, p) \cong \mathbb{Z}_2\right)$

$\left(\text{pois } \mathbb{RP}^n \cong S^n/\mathbb{Z}_2\right)$

$\left(\text{e } \mathbb{RP}^1 \cong S^1 \Rightarrow \pi_1(\mathbb{RP}^1, p) \cong \mathbb{Z}\right)$

Teorema (Borsuk-Ulam): Seja $f : S^n \to \mathbb{R}$, $n \geq 2$, f ímpar

$\Rightarrow \exists x \in S^n$ tq $f(x) = 0$.

Demonst: Suponha que $f(x) \neq 0, \forall x$

$\Rightarrow f$ induz $F : S^n \to S^1$

$$F(x) = \frac{f(x)}{\|f(x)\|} \quad \text{ímpar, e}$$

$\Rightarrow F$ induz $\bar{F} : \mathbb{RP}^n \to \mathbb{RP}^1$

$$\bar{F}([x]) = [F(x)]$$

Afirmação: $\exists$ levantamento $\tilde{F} : \mathbb{RP}^n \to S^1$ de $\bar{F}$, pois $\bar{F}_\# : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z} \Rightarrow$

$\Rightarrow \bar{F}_\# \equiv \bar{0}$.

$$\begin{tikzcd} S^n \arrow[r, "F"] \arrow[d, "q"'] & S^1 \arrow[d, "p"] \\ \mathbb{RP}^n \arrow[r, "\bar{F}"'] \arrow[ur, dashed, "\tilde{F}"] & \mathbb{RP}^1 \cong S^1 \end{tikzcd}$$

$\pi_1(\mathbb{RP}^n, x) = \mathbb{Z}_2$ $\qquad$ $\pi_1(S^1, x) = \mathbb{Z}$.

Note que:

$$\begin{tikzcd} & S^1 \arrow[d, "p"] \\ S^n \arrow[ur, bend left, "F"] \arrow[ur, "\tilde{F} \circ q"'] \arrow[r, "p \circ F"'] & \mathbb{RP}^1 \end{tikzcd}$$

$p \circ F = \bar{F} \circ q$

$$F(x_0) = \tilde{F} \circ \overbrace{q(x_0)}^{[x_0]}$$

$$\Downarrow$$

$$F \equiv \tilde{F} \circ q$$

mas $F(-x_0) = -F(x_0) \rightsquigarrow \tilde{F}\, q(-x_0) = \tilde{F}\, q(x_0) = F(x_0)$.

Absurdo!

Corolário: Dado $g : S^n \to \mathbb{R}^2$ $(n \geq 2)$ qq

$\exists x_0 \in S^n$ tq $g(x_0) = g(-x_0)$.

Demonst: $f(x) = g(x) - g(-x)$ ∎