17/08/2015

Recobrimentos

Idéia: Como "reconhecer" um grupo G?
Por suas ações! (Representações)

Def: Uma <u>ação (à esquerda)</u> de G em X é uma aplicação
$\mu: G \times X \to X$ tq (1) $1 \cdot x = x, \ \forall x \in X$
$(g, x) \mapsto gx$ (2) $g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x$

Obs: (à direita): (1') $x \cdot 1 = x$
$X \times G \to X$ (2') $x(gh) = (xg)h$
$(x, g) \mapsto x \cdot g$

Dada uma ação $G \circlearrowright X$, definimos
$\mathcal{O}_x = \{gx \mid g \in G\} \subseteq X$ (órbita de x)
$G_x = \mathrm{Iso}(x) = \{g \in G \mid gx = x\} \leq G$ (isotropia de x)

Teorema:

$$\begin{tikzcd} g \arrow[r, mapsto] & g \cdot x \\ G \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}_x \\ G/G_x \arrow[ur] & \\ {[g]} \arrow[r, mapsto] & g \cdot x \end{tikzcd}$$

(é uma bijeção)

(Análogo ao Teorema do Isomorfismo)

Def: Uma ação $G \circlearrowright X$ é
- transitiva: Se $\mathcal{O}_x = X$ (para algum x e portanto $\forall$)
- livre: Se $G_x = \{1\}, \ \forall x \in X$.

Obs: • $G \circlearrowright X \Rightarrow G \circlearrowright \mathcal{O}_x$ transitiva

• Se $G \circlearrowright X$ é livre e transitiva $\Longrightarrow G \xleftrightarrow{\text{bij}} X$

Teorema: Se $G \circlearrowright X \circlearrowleft H$ são ações livres e transitivas que comutam ($(gx)\cdot h = g\cdot(xh)$), então $G \cong H$ (isomorfismo)

Demonst: Fixemos $x \in X$, e definimos $\psi_x : G \longrightarrow H$ de modo que $\psi_x(g) = h$, em que $gx = xh$.

Bijeção: $G \times X \longrightarrow X \times X \longleftarrow X \times H$

$(g,h) \longmapsto (gh, x)$

Basta então ver que é homomorfismo de grupos

$1 \cdot x = x = x \cdot 1 \quad (\psi_x(1) = 1)$ ✓

$\psi_x(g_1 g_2) = \underbrace{\psi_x(g_1)}_{h_1} \underbrace{\psi_x(g_2)}_{h_2}$

$(g_1 g_2)x = g_1(g_2 x) = g_1(x h_2) = (g_1 x)h_2 = (x h_1)h_2 = x(h_1 h_2)$ ✓

Estratégia: Procurar um conjunto em que $\pi_1(X,x)$ age livre e transitivo.

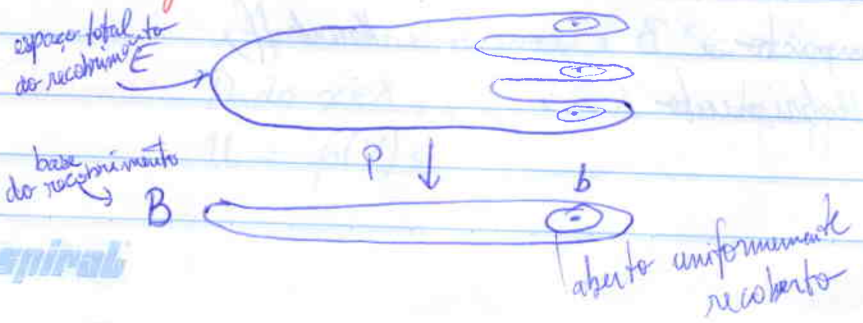
Recobrimento

Def: Uma aplicação de recobrimento é uma aplicação $P: E \to B$, satisfazendo:

$\forall b \in B$, $\exists$ viz $\mathcal{U} \subseteq B$ tq $P^{-1}(\mathcal{U}) = \dot{\bigcup}_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$ $(\Lambda \neq \emptyset)$

e $P|_{V_\lambda} : V_\lambda \longrightarrow \mathcal{U}$ é um homeomorfismo

Terminologia: E é recobrimento de B



Propriedades Básicas

(1) p é sobrejetora; (pois $\Lambda \neq \emptyset$)

(2) p é um homeomorfismo local ($\Rightarrow p$ é aplicação aberta)

(3) B tem a topologia quociente

$$\begin{tikzcd} E \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "f \circ p"] & \\ B \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

(4) As fibras (pré-imagem de um ponto) de p são discretas (com a topologia induzida) $p^{-1}(b) \subseteq E$

(5) A cardinalidade de $p^{-1}(b)$ é constante nas componentes conexas de B.

Demonst: Seja $A \subseteq B$, $A = \{b' \in B \mid \# p^{-1}(b) = \# p^{-1}(b')\}$

(i) A é aberto: $b' \in A$, $b \in \mathcal{U} \subseteq B$ uniforme

$\Rightarrow b'' \in \mathcal{U}$, $\# p^{-1}(b'') = \# p^{-1}(b') = \#$ folhas do recobrimento $\Rightarrow$

$\Rightarrow \mathcal{U} \subseteq A$.

(ii) $B \setminus A$ é aberto

$\overset{\shortparallel}{\{b' \in B \mid \# p^{-1}(b') \neq \# p^{-1}(b)\}}$ ■

(6) Se $W \subseteq B$ aberto, então $p: p^{-1}(W) \to W$ é recobrimento.

Obs: Nem todo homeomorfismo local é um recobrimento, e.g., $]0,1[\hookrightarrow \mathbb{R}$.

Exercício. Seja $p: E \to B$ homeomorfismo local. Mostre que:

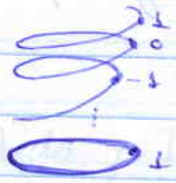
(1) Se $\# p^{-1}(b) = \# p^{-1}(b') < \infty$, $\forall b, b' \in B \Rightarrow$

$\Rightarrow p$ é um recobrimento.

(2) Se E é compacto e B é conexo e Hausdorff, então p é recobrimento

Exemplos: (1) $p: \mathbb{R} \longrightarrow S^1 \subseteq \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$

$$t \longmapsto e^{2\pi i t} = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$$



$$p^{-1}(1) = \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$$

$$p^{-1}(\underbrace{S^1 - \{-x\}}_{\mathcal{U}}) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(t_0 + \frac{2k-1}{2}, t_0 + \frac{2k+1}{2} \right)$$

$e^{2\pi i t_0} = x \in \mathcal{U}$

(2) $p: \mathbb{R}^n \to \underbrace{S^1 \times \ldots \times S^1}_{n \text{ cópias}} = T^n$

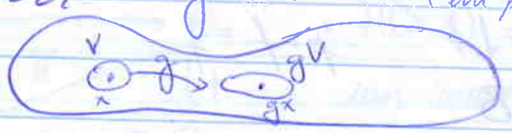
$$p(t_1, \ldots, t_n) = (e^{2\pi i t_1}, \ldots, e^{2\pi i t_n})$$

(3) $p: S^n \longrightarrow \mathbb{R}P^n = S^n/\sim$, $\quad x \sim (-x)$

$$x \longmapsto [x]$$

Def: Uma ação (contínua) $G \circlearrowright X$ diz-se <u>propriamente descontínua</u> se $\forall x \in X, \exists (x \in) V \subseteq X$ viz tq

$g \neq 1 \Rightarrow$ ~~[illegible]~~ $\Rightarrow gV \cap V = \emptyset$ (em particular, $G \circlearrowright X$ é livre (MUITO))



Exemplos: (1) $\mathbb{Z} \circlearrowright \mathbb{R}$, $n \cdot x = x + n$ é propriam/te descontínua.

$$\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1$$

(2) $\mathbb{Z}_2 \circlearrowright S^n \qquad 1 \cdot x = x, \ (-1) \cdot x = -x, \quad S^n/\mathbb{Z}_2 = \mathbb{R}P^n$

Proposição: Se $G \circlearrowright X$ propriamente descontínua, então $p: X \to X/G$ é um recobrimento ($X/G = X/\sim$, $x \sim gx$, $g \in G$).

Demonst: Dado $x \in X$, seja $V \subseteq X$ viz tq $gV \cap V = \emptyset$, $\forall g \neq 1$.

$\mathcal{U} = p(V) \subseteq X/G$.

(i) U é aberto, pois $p^{-1}(U) = \dot{\bigcup}_{g \in G} gV$.

(ii) $p|_{gV} : gV \longrightarrow U$ é homeomorfismo, $p(gx) = p(x)$

basta provar que $p : V \longrightarrow U$ é

injetor: $x', x'' \in V$, $p(x') = p(x'')$

$\Rightarrow \exists g$ tq $gx' = x'' \Rightarrow g = 1 \Rightarrow x' = x''$.

sobrejetor: por construção. ■

Obs: Um grupo topológico é um esp. top. G com estrutura de grupo tq

$m : G \times G \longrightarrow G$ e $i : G \longrightarrow G$ são contínuas.

$(g,h) \longmapsto gh$ $\qquad x \longmapsto x^{-1}$

μ é ação contínua se $\mu : G \times X \longrightarrow X$ contínua.

Recobrimento e Grupo Fundamental ($p : E \longrightarrow B$)

Def: Seja $f : X \to B$. Um levantamento de f é

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd} \qquad p \circ \tilde{f} = f$$

Teorema. Se $p : E \longrightarrow B$ recobrimento. Então:

(1) (Unicidade de Levantamentos)

Se X é conexo e $\hat{f}, \tilde{f} : X \longrightarrow E$ são levantamentos de $f : X \to B$ com $\hat{f}(x_0) = \tilde{f}(x_0)$, para algum $x_0 \in X$, então $\hat{f}(x) = \tilde{f}(x)$, $\forall x \in X$.

(2) (Levantamento de Homotopia)

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, hook, "X \times \{0\}"'] & E \arrow[d, "p"] \\ X \times I \arrow[r, "H"'] \arrow[ur, dashed, "\tilde{H}"] & B \end{tikzcd}$$

(*)

Se $\tilde{f}: X \to E$, $H: X \times I \to B$ tq $H(x,0) = (p \circ \tilde{f})(x)$

$\Rightarrow \exists! \ \tilde{H}: X \times I \to E$ tq $\tilde{H}(x,0) = \tilde{f}(x)$.

Conseqüências:

Teorema: Dado $\gamma: I \to B$, $\gamma(0) = b$ e $e \in p^{-1}(b)$, $\exists! \ \tilde{\gamma}: I \to E$ levantamento tq $\tilde{\gamma}(0) = e$

$$0 \longmapsto e$$

$$\begin{tikzcd} \{0\} \arrow[r] \arrow[d, hook] & E \arrow[d, "p"] \\ I \arrow[r, "\gamma"'] \arrow[ur, "\tilde{\gamma}"] & B \end{tikzcd}$$

■

Teorema: Se $\alpha \sim \beta$ (rel ∂I), então $\tilde{\alpha}_e \sim \tilde{\beta}_e$ (rel ∂I)

(em particular, $\tilde{\alpha}_e(1) = \tilde{\beta}_e(1)$).

Notação:

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ I \arrow[r, "\alpha"'] \arrow[ur, "\tilde{\alpha}_e"] & B \end{tikzcd} \qquad \tilde{\alpha}_e(0) = e$$

Demonst:

$$\begin{tikzcd} I \times \{0\} \arrow[r, "\tilde{\alpha}_e"] \arrow[d] & E \arrow[d, "p"] \\ I \times I \arrow[r] \arrow[ur, "\tilde{H}"] & B \end{tikzcd}$$

- $\tilde{H}(s,1) = \tilde{\beta}_e(s)$, mas $\tilde{H}(s,1)$ é um levantamento de β que começa em e, por unicidade, deve ser $\tilde{\beta}_e(s)$

- $\tilde{H}(0,t) = e, \forall t$ e • $\tilde{H}(1,t) = \tilde{\alpha}_e(1) \ \forall t$

~~[illegible]~~ $(p \circ \tilde{H})(0,t) = H(0,t) = b \ \forall t$

fibra discreta $\Rightarrow$ constante ■

Obs: Vale a recíproca: $\tilde{\alpha}_e \sim \tilde{\beta}_e$ rel $\partial I \Rightarrow \alpha \sim \beta$ rel ∂I $(p \circ \tilde{H} = H)$

Construção: $\pi_1(B,b)$ age à direita em $p^{-1}(b)$, com
$$e\cdot[\alpha] = \tilde\alpha_e(1)$$

Proposição: Se E é conexo por caminhos, então

(1) A ação é transitiva;

(2) $Iso(e) = \underbrace{p_\# \pi_1(E,e)}_{\pi_1(E,e)} \subseteq \pi_1(B,b)$.

Em particular
$$\pi_1(B,b)\Big/ p_\#\pi_1(E,e) \xleftrightarrow{1-1} p^{-1}(b)$$

Se E é 1-conexo $\Rightarrow \pi_1(B,b) \xleftrightarrow{1-1} p^{-1}(b)$

Demonst: 1) Dados $e, e' \in p^{-1}(b)$.

Quero: $\exists [\alpha] \in \pi_1(B,b)$ tq $e\cdot[\alpha] = e'$

Seja $\gamma : I \to E$, $\gamma(0) = e$, $\gamma(1) = e'$,
e tome $\alpha = p\circ\gamma \Rightarrow \tilde\alpha_e = \gamma \Rightarrow \tilde\alpha_e(1) = e'$.

2) i) $p_\#$ é injetora

$\tilde\alpha, \tilde\beta \in \pi_1(E,e)$, $\alpha \sim \beta$ rel $\partial I \iff$

$\iff p\circ\tilde\alpha \sim p\circ\tilde\beta$ rel ∂I

ii) $Iso(e) = \{[\alpha] \in \pi_1(B,b) \mid \tilde\alpha_e(1) = e\} =$

$= \{[\alpha] \mid [\tilde\alpha] \in \pi_1(E,e)\} = \{[\tilde\alpha] \in \pi_1(E,e)\}$.

Suponha que E é 1-conexo e $G \curvearrowright E$ prop. desc., e $B = E/G$.

Vou mostrar que $G \curvearrowright p^{-1}(b) \curvearrowleft \pi_1(B,b)$ comuta

$(g\cdot e)[\alpha] = \tilde\alpha_{ge}(1)$

$g\cdot(e\cdot[\alpha]) = g\cdot\tilde\alpha_e(1)$

Um levantamento de $\tilde\alpha$ começando em $g\cdot e$ é $(g\cdot\tilde\alpha_e)(s) = g\tilde\alpha_e(s) \Rightarrow$

$\Rightarrow \pi_1(B,b) \cong G$.

Exemplo: $\mathbb{Z} \curvearrowright \mathbb{R}$ prop. desc., $\mathbb{R}$ é 1-conexo

$\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1 \Rightarrow \pi_1(S^1,1) \cong \mathbb{Z}$.