Aula 25

O Teorema dos Coeficientes Universais

Lembre que:

- Uma resolução projetiva de um R-módulo M é uma sequencia exata

$$\cdots \longrightarrow P_k \xrightarrow{\partial_k} P_{k-1} \xrightarrow{\partial_{k-1}} P_{k-2} \to \cdots \xrightarrow{\partial_2} P_1 \xrightarrow{\partial_1} P_0 \xrightarrow{\partial_0} M \to 0$$

onde cada P_k é um R-módulo projetivo.

- Se $M = A$ é um grupo abeliano ($\mathbb{Z}$-módulo)

$\Rightarrow$ Resolução Projetiva $=$ Resolução Livre

- Todo subgrupo de grupo livre é livre
- $0 \to \underbrace{R(A)}_{P_1} \xrightarrow{\partial_1} \underbrace{F(A)}_{P_0} \xrightarrow{\partial_0} \underbrace{A}_{P_{-1}} \to 0$ é resolução livre de A.

$R(A) = \ker \partial_0$

Lema: Se $P_* \to A$ & $P'_* \to A$ são resoluções livres de $A \Rightarrow$

$$\begin{cases} H^k(P_*, G) \cong H^k(P'_*, G) \ \forall k \text{ (canonicamente)} \\ H_k(P_* \otimes G) \cong H_k(P'_* \otimes G) \ \forall k \end{cases}$$

OBS: Segue que podemos usar a resolução

$$0 \to R(A) \xrightarrow{\partial_1} F(A) \xrightarrow{\partial_0} A \to 0 \quad \text{(sequencia curta exata)}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0 \to \mathrm{Hom}(A, G) \xrightarrow{\partial_0^*} \mathrm{Hom}(F(A), G) \xrightarrow{\partial_1^*} \mathrm{Hom}(R(A), G) \\ R(A) \otimes G \xrightarrow{\partial_1 \otimes Id_G} F(A) \otimes G \xrightarrow{\partial_0 \otimes Id_G} A \otimes G \to 0 \end{array} \right\} \text{exatas}$$

$$\Rightarrow H^k(P_*, G) = \begin{cases} 0 & \text{se } k \neq 1 \\ \operatorname{coker} \partial_1^* = \dfrac{\mathrm{Hom}(R(A), G)}{\operatorname{Im} \partial_1^*} & \text{se } k = 1 \end{cases}$$

$$H_k(P_*, G) = \begin{cases} \ker \partial_1 \otimes Id_G & \text{se } k = 1 \\ 0 & \text{se } k \neq 1 \end{cases}$$

Sejam A, G grupos abelianos.

<u>Def</u>: $\left.\begin{aligned} \mathrm{Ext}(A,G) &= H^1(P_*, G) \\ \mathrm{Tor}(A,G) &= H_1(P_* \otimes G) \end{aligned}\right\}$ onde $P_* \to A$ é uma resolução livre

<u>Exemplos de Ext</u>:

a) $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}) = 0$:

$$0 \to \underbrace{0}_{P_1} \to \underbrace{\mathbb{Z}}_{P_0} \to \underbrace{\mathbb{Z}}_{A=P_{-1}} \to 0 \quad \text{é resolução livre}$$

$$\Rightarrow \quad 0 \leftarrow \underbrace{0}_{\mathrm{Hom}(P_1,\mathbb{Z})} \xleftarrow{0} \underbrace{\mathbb{Z}}_{\mathrm{Hom}(P_0,\mathbb{Z})} \xleftarrow{Id} \underbrace{\mathbb{Z}}_{\mathrm{Hom}(P_{-1},\mathbb{Z})} \leftarrow 0 \qquad \Rightarrow H^1(P_*, \mathbb{Z}) = 0$$

b) $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_m$

- Resolução livre:

$$0 \to \underbrace{\mathbb{Z}}_{P_1} \xrightarrow{\cdot m} \underbrace{\mathbb{Z}}_{P_0} \longrightarrow \underbrace{\mathbb{Z}_m}_{P_{-1}} \to 0$$

- Complexo dual $(\mathrm{Hom}(P_*, \mathbb{Z}))$

$$0 \leftarrow \mathbb{Z} \xleftarrow{\cdot m} \mathbb{Z} \xleftarrow{0} 0 \leftarrow 0$$

- $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}) = H^1(P_*, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_m$

<u>Exercício</u>: Mostre que

(a) $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_n) = 0$

(b) $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}_n) = \mathbb{Z}_d$ onde $d = \mathrm{mdc}(m,n)$

(c) $\mathrm{Ext}(A_1 \oplus A_2, B) = \mathrm{Ext}(A_1, B) \oplus \mathrm{Ext}(A_2, B)$

Exemplos de TOR:

TOR	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_n$
$\mathbb{Z}$	0	0
$\mathbb{Z}_m$	0	$\mathbb{Z}_d$

$d = \mathrm{mdc}(m,n)$

$\mathrm{Tor}(\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}_n) = \mathbb{Z}_d$:

Resolução livre: $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot m} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_m \to 0$

Complexo induzido $(P_* \otimes G)$:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Z}\otimes\mathbb{Z}_n & \xrightarrow{\cdot m \otimes \mathbb{I}d} & \mathbb{Z}\otimes\mathbb{Z}_n & \longrightarrow \mathbb{Z}_m\otimes\mathbb{Z}_n \longrightarrow 0 \\ \wr\wr ? & & \wr\wr ? & \\ \mathbb{Z}_n & \xrightarrow[\cdot m]{} & \mathbb{Z}_n & \end{array}$$

$$\mathrm{Tor}(\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}_n) = \mathrm{Ker}(\cdot m) = \{ k \in \mathbb{Z}_n \mid mk = nl,\ l \in \mathbb{Z} \}$$

$$\cong \mathbb{Z}_{\mathrm{mdc}(m,n)}$$

Exercício: • Mostre os outros valores da tabela

• Mostre que $\mathrm{Tor}(A_1 \oplus A_2, B) \cong \mathrm{Tor}(A_1, B) \oplus \mathrm{Tor}(A_2, B)$

$$\mathrm{Tor}(A,B) \cong \mathrm{Tor}(B,A)$$

Teorema (dos coeficientes universais para cohomologia):

Seja (C_n, ∂) um complexo de cadeias livre, G um grupo abeliano. Então existe uma sequencia exata natural

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}(H_{n-1}(C_*), G) \xrightarrow{\alpha} H^n(C_*, G) \xrightarrow{\beta} \mathrm{Hom}(H_n(C_*), G) \to 0$$

Além disso, a sequencia é split (Não Natural).

Dem: Considere as sequencias exatas:

$$(1) \qquad 0 \longrightarrow Z_k \xrightarrow{i_k} C_k \xrightarrow{\partial} B_{k-1} \longrightarrow 0$$

(split pois B_{k-1} é livre)

$$(2) \qquad 0 \longrightarrow B_k \xrightarrow{j_k} Z_k \xrightarrow{p_k} H_k \longrightarrow 0$$

(Resolução livre de H_k)

De (2) obtemos

$$0 \longleftarrow \mathrm{Ext}(H_k, G) \xleftarrow{p^*} \mathrm{Hom}(B_k, G) \xleftarrow{j_k^*} \mathrm{Hom}(Z_k, G) \longleftarrow \mathrm{Hom}(H_k, G) \longleftarrow 0$$

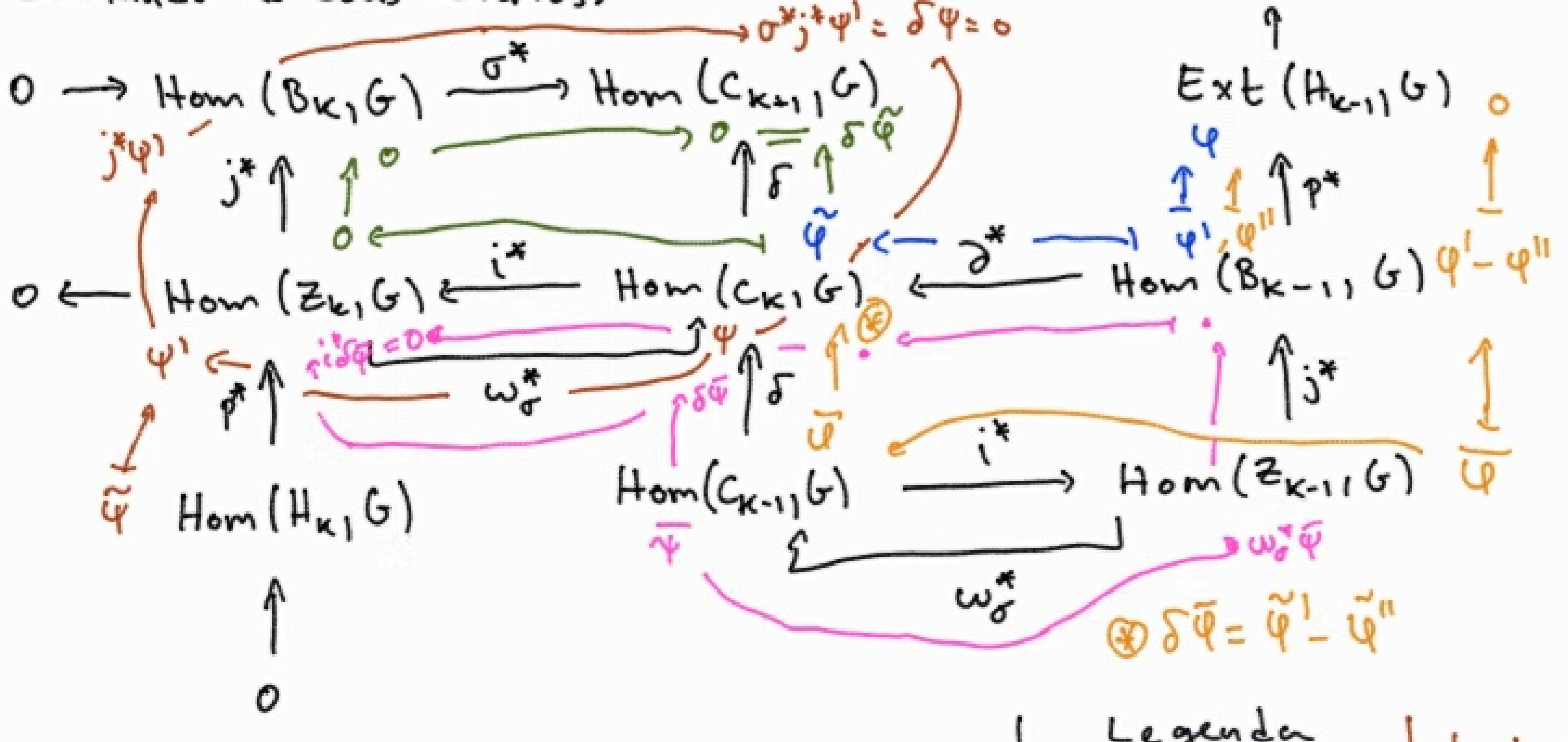
$$\left(\mathrm{Ext}(H_k, G) = \frac{\mathrm{Hom}(B_k, G)}{\mathrm{Im}\, j_k^*} \right)$$

De (1) obtemos

$$0 \longleftarrow \mathrm{Hom}(Z_k, G) \longleftarrow \mathrm{Hom}(C_k, G) \longleftarrow \mathrm{Hom}(B_{k-1}, G) \longleftarrow 0$$

(Exata pois (1) é split)

Juntando as duas obtemos:



- Todas as linhas são exatas
- As colunas 1 & 3 são exatas

Legenda
- Def. de α
- $\tilde\varphi$ é cociclo
- Bem definido
- def. de β
- β bem definido

• <u>Definição de $\alpha: \mathrm{Ext}(H_{k-1}, G) \longrightarrow H^k(C, G)$</u>

Começa com $\varphi \in \mathrm{Ext}(H_{k-1}, G)$. Desce + para esquerda $\Rightarrow \tilde{\varphi}$. $\alpha(\varphi) = [\tilde{\varphi}]$ $\left(\begin{array}{l}\delta\tilde{\varphi} = 0 \text{ (verde)} \\ \text{Bem definido (Laranja)}\end{array}\right)$

• <u>Definição de $\beta: H^k(C., G) \longrightarrow \mathrm{Hom}(H_k, G)$</u>

Toma $\psi \in \mathrm{Hom}(C_k, G)$, $\delta\psi = 0$

$\Rightarrow i^*\psi \in \mathrm{Hom}(Z_k, G) \Rightarrow \sigma^* j^* i^* \psi = \delta\psi = 0 \Rightarrow j^* i^* \psi = 0 \Rightarrow i^*\psi = p^*\tilde{\psi}$

$\beta([\psi]) = \tilde{\psi}$. (Bem definido: rosa)

• <u>Exato em $\mathrm{Ext}(H_{k-1}, G)$</u>: (α é injetor)

Se $\tilde{\varphi} = \delta\bar{\Psi} \Rightarrow \tilde{\tilde{\varphi}} = \partial^* j^* i^* \bar{\Psi}$ & $\alpha(\varphi) = p^* j^* i^* \bar{\Psi} = 0$

• <u>Exato em $H^k(C., G)$</u>:

- $\mathrm{Im}\,\alpha \subset \mathrm{Ker}\,\beta$ $\quad p^*\beta(\alpha(\varphi)) = i^*\partial^*\varphi' = 0$

- $\mathrm{Ker}\,\beta \subset \mathrm{Im}\,\alpha$

Seja $[\psi] \in \mathrm{Ker}\,\beta \Rightarrow i^*\psi = 0 \Rightarrow \exists\, \psi'$ t.q. $\partial^*\psi' = \psi$

seja $\varphi = p^*\psi'$

$\Rightarrow \alpha(\varphi) = [\partial^*\psi'] = [\psi]$

Exato em $Hom(H_K, G)$: (β é sobrejetor)

Tome $\tilde{\psi} \in Hom(H_K, G)$.

$\Rightarrow p^* \tilde{\psi} = i^* \psi$ para algum $\psi \in Hom(C_K, G)$.

mas $\delta\psi = \sigma^* \underbrace{j^* p^*}_{} \tilde{\psi} = 0 \Rightarrow [\psi] \in H^K(C., G)$ & $\beta[\psi] = \tilde{\psi}$.

- **A sequencia é split:**

Cisão: $\omega_\sigma^* \circ p^*$

$\square$

Corolário: Seja $(C., \partial)$ um complexo de grupos abelianos livres. Então

$$H^K(C., \mathbb{Z}) \cong \underbrace{L(H_K(C.))}_{\text{parte livre}} \oplus \underbrace{T(H_{K-1}(C.))}_{\text{parte de torção.}}$$

Aplicação / Exercício: Use o Lema do 5 & a sequencia exata do Teorema dos coeficientes universais para enunciar e demonstrar

- Excisão para cohomologia
- Invariancia de Homotopia para Cohomologia
- Cohomologia de um ponto
- Mayer-Vietoris para cohomologia

$\vdots$

Teorema (Coeficientes universais para homologia) ⑦

Se (C_*, ∂) é um complexo de cadeias de grupos abelianos livres, e G é um grupo abeliano, então existe uma sequencia curta exata (natural) que é split (não natural)

$$0 \longrightarrow H_n(C_\cdot) \otimes G \xrightarrow{\alpha} H_n(C_\cdot, G) \xrightarrow{\beta} \mathrm{Tor}(H_{n-1}(C_\cdot), G) \longrightarrow 0$$

onde $\alpha([c] \otimes g) = [c \otimes g] \in H_n(C_\cdot \otimes G) = H_n(C_\cdot, G)$

Dem/exercício: Use o diagrama abaixo para demonstrar o teorema

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] & \\
0 & B_p \otimes G \arrow[l] \arrow[d] & C_{p+1} \otimes G \arrow[l, "\sigma \otimes Id"'] \arrow[d, "\partial \otimes Id"] & \mathrm{Tor}(H_{p-1}, G) \arrow[d] & \\
 & Z_p \otimes G \arrow[r, "i \otimes Id"] \arrow[d] & C_p \otimes G \arrow[r, "p \otimes Id"] \arrow[d, "\partial \otimes Id"] & B_{p-1} \otimes G \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & H_p \otimes G & C_{p-1} \otimes G \arrow[r, bend right, "\omega_\sigma \otimes Id"'] & Z_{p-1} \otimes G \arrow[l, "i \otimes Id"'] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Fim do Curso.

Obrigado!