Aula 24
Cohomologia

- Seja $(C_., \partial) = \mathcal{C}$ um complexo de cadeias de grupos abelianos.

$$\cdots \xrightarrow{\partial} C_{k+1} \xrightarrow{\partial} C_k \xrightarrow{\partial} C_{k-1} \xrightarrow{\partial} \cdots$$

- Seja G um grupo abeliano (o mesmo pode ser feito para aneis)

<u>Def</u>: $C^k = \mathrm{Hom}(C_k, G)$ (Homomorfismo de grupos abelianos)

$$\delta : C^k \longrightarrow C^{k+1}$$
$$(\delta\phi)(\sigma) = \phi(\partial\sigma)$$

(ou seja, $\delta = \partial^* \rightsquigarrow$ transposto ou dual)

<u>Lema</u>: $\delta^2 = 0$

<u>Dem</u>: $\delta(\delta\phi)(\sigma) = (\delta\phi)(\partial\sigma) = \phi(\partial^2\sigma) = 0$

<u>Def</u>: $H^k(C, G) = \dfrac{\mathrm{Ker}\,\delta_k}{\mathrm{Im}\,\delta_{k-1}}$

<u>Nomeclatura</u>: . $\phi \in C^k = \mathrm{Hom}(C_k, G)$ é uma co-cadeia

- $\mathrm{Ker}\,\delta_k = \{\text{cocíclos}\}$; • $\mathrm{Im}\,\delta_{k-1} = \{\text{cobordos}\}$

<u>OBS</u>: Em geral, um complexo de co-cadeias de R-módulos é uma sequencia de R-módulos & Homomorfismos de R-módulos

$$\cdots \xleftarrow{\delta} C^{k+1} \xleftarrow{\delta} C^k \xleftarrow{\delta} C^{k-1} \xleftarrow{\delta} \cdots$$

tal que $\delta^2 = 0$.

- A construção acima é uma forma de obter um complexo de co-cadeias de $\mathbb{Z}$-módulos através de um complexo de cadeias $(C_., \partial)$ & um grupo abeliano G.
- Nem todo complexo de co-cadeias é desta forma: e.g., o cplxo de de Rham $(\Omega^\cdot(M), d)$.

<u>Exemplo</u> (Cohomologia Singular de X com coef. em G)

$$C^k(X,G) = \mathrm{Hom}(C_k(X,\mathbb{Z}), G) \; ; \; \delta = \partial^*.$$

<u>Pergunta</u>: Qual a relação entre cohomologia & homologia?

- Palpite natural: $H^k(C_\cdot, G) \overset{?}{\underset{?}{\cong}} \mathrm{Hom}(H_k(C_\cdot), G)$???

Vamos ver um exemplo:

Considere o complexo de cadeias

$$0 \to \underset{C_3}{\mathbb{Z}} \xrightarrow{0} \underset{C_2}{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\cdot 2} \underset{C_1}{\mathbb{Z}} \xrightarrow{0} \underset{C_0}{\mathbb{Z}} \to 0$$

$$\Rightarrow \quad H_k(C_\cdot) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } k = 0,3 \\ \mathbb{Z}_2 & \text{se } k = 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Vamos olhar para cohomologia com coeficientes em $\mathbb{Z}$.

- Note que $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$

$$\phi \longmapsto \phi(1)$$

Logo, o complexo de co-cadeias é

$$0 \xleftarrow{0} \underset{C^3}{\mathbb{Z}} \xleftarrow{\delta^2} \underset{C^2}{\mathbb{Z}} \xleftarrow{\delta^1} \underset{C^1}{\mathbb{Z}} \xleftarrow{\delta^0} \underset{C^0}{\mathbb{Z}} \leftarrow 0$$

- $\delta^0(\phi)(1) = \phi(\partial_1(1)) = \phi(0) = 0 \Rightarrow \delta^0 = 0$
- $\delta^1(\phi)(1) = \phi(\partial_2(1)) = \phi(2) = 2\cdot\phi(1) \Rightarrow \delta^1 = \cdot 2$
- $\delta^2(\phi)(1) = \phi(\partial_3(1)) = \phi(0) = 0 \Rightarrow \delta^2 = 0$

$$\Rightarrow \quad H^k(C_\cdot, \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } k = 0,3 \\ \mathbb{Z}_2 & \text{se } k = 2 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

(Note que o termo de "torsão" $\mathbb{Z}_2$ passou de grau 1 para 2)

Por outro lado:

$$\mathrm{Hom}(H_k(C),\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } k=0,3 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$\Rightarrow \mathrm{Hom}(H_k(C),\mathbb{Z}) \neq H^k(C,\mathbb{Z})$.

Então, qual a relação entre esses grupos?

- Resposta: vamos introduzir um novo grupo $\mathrm{Ext}(H_{n-1}(C),G)$ e demonstrar:

Teorema dos coeficientes universais para Cohomologia:

Seja $(C_\cdot,\partial)$ um complexo de cadeias onde cada C_k é um grupo abeliano livre. Então, existe uma sequencia exata natural

$$0 \to \mathrm{Ext}(H_{n-1}(C),G) \xrightarrow{\alpha} H^n(C,G) \xrightarrow{\beta} \mathrm{Hom}(H_n(C),G) \to 0$$

& a sequência é split (não natural).

OBS: - Vou explicar todos os conceitos que aparecem acima.
- Vou aproveitar e fazer também o Teorema dos Coeficientes universais para homologia:

Relação entre $H_n(C_\cdot,G)$ & $H_n(C_\cdot)\otimes G$

- $\mathrm{Hom}(A,B)$ & $A\otimes B$:

Sejam A,B grupos abelianos.

Def: $A\otimes B := A\underset{\mathbb{Z}}{\otimes} B = \langle a\otimes b \mid a\in A \ \&\ b\in B\rangle$ ($\mathbb{Z}$-módulo gerado por $\{a\otimes b\}$)

onde $a\otimes b = [(a,b)] \in A\times B/\sim$ e $\sim$ é a menor relação de equiv. tal que $(a_1+a_2)\otimes b = a_1\otimes b + a_2\otimes b$, $a\otimes(b_1+b_2) = a\otimes b_1 + a\otimes b_2$

Propriedade Universal

Se $f: A\times B \longrightarrow C$ é bilinear (sobre $\mathbb{Z}$), então existe um único $\bar{f}: A\otimes B \longrightarrow C$ homomorfismo tal que

$$\begin{tikzcd} A\times B \arrow[r, "f"] \arrow[d] & C \\ A\otimes B \arrow[ur, dashed, "\exists!\, \bar{f}"'] & \end{tikzcd} \qquad \bar{f}(a\otimes b) = f(a,b)$$

OBS: Podemos pensar em $A\otimes B$ como o grupo que satisfaz

$$\mathrm{Hom}(A, \mathrm{Hom}(B,C)) \cong \mathrm{Hom}(A\otimes B, C)$$

$$\varphi \rightsquigarrow \tilde{\varphi}(a\otimes b) = \varphi(a)(b)$$

$$\varphi(a)(b) = \tilde{\varphi}(a\otimes b) \leftsquigarrow \tilde{\varphi}$$

Exercício: Mostre que

a) $\mathbb{Z}\otimes B \cong B$; b) $\left(\bigoplus_i A_i\right)\otimes B \cong \bigoplus_i (A_i \otimes B)$

c) $A\otimes B \cong B\otimes A$

d) $\mathbb{Z}_k \otimes \mathbb{Z}_\ell \cong \mathbb{Z}_d$ onde $d = \underbrace{\mathrm{mdc}}_{\text{max. divisor comum.}}(k,\ell)$

OBS: Se $\begin{cases} f: A\to A' \\ g: B\to B' \end{cases}$ são homomorfismos $\Rightarrow$ $f\otimes g: A\otimes B \longrightarrow A'\otimes B'$
$a\otimes b \mapsto f(a)\otimes g(b)$
é homomorfismo

- Fixando $B \Rightarrow -\otimes B$ é um functor

$$-\otimes B: Ab \longrightarrow Ab$$
$$A \longmapsto A\otimes B$$
$$f \longmapsto f\otimes Id_B$$

<u>Proposição/Exercício</u>: $-\otimes B$ é exato à direita, isto é:

se $0 \to A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} A'' \to 0$ é seq. curta exata

$\Rightarrow$ $$A'\otimes B \xrightarrow{f\otimes Id_B} A\otimes B \xrightarrow{g\otimes Id_B} A''\otimes B \to 0$$ é exata

(mas $f\otimes Id_B : A'\otimes B \to A\otimes B$ não precisa ser injetora. Encontre um exemplo!)

• <u>$Hom(A,B)$</u>:

• $Hom(-,B): Ab \to Ab$ é um functor contravariante:

$$f: A \to A' \Rightarrow f^*: Hom(A',B) \to Hom(A,B)$$
$$\varphi \longmapsto (f^*\varphi)(a) = \varphi(f(a))$$

<u>Prop</u>: $Hom(-,B)$ é exato à esquerda:

Se $0 \to A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} A'' \to 0$ exata

$\Rightarrow$ $$0 \longrightarrow Hom(A'',B) \xrightarrow{g^*} Hom(A,B) \xrightarrow{f^*} Hom(A',B)$$

é exato.

(Mas f^* não precisa ser sobrejetora).

<u>Dem</u>: • <u>Exato em $Hom(A'',B)$</u>: Queremos mostrar que g^* é injetor.

suponha que $\varphi: A'' \to B$ é tal que $g^*\varphi \equiv 0$

$\Rightarrow \varphi(g(a)) = 0 \quad \forall a\in A$. Mas g é sobrejetor

$\Rightarrow \varphi(a'') = 0 \quad \forall a'' \in A'' \Rightarrow \varphi \equiv 0$

• <u>Exato em $Hom(A,B)$</u>: Queremos mostrar $Ker f^* = Img^*$.

(i) $Im g^* \subset ker f^*$: Seja $\varphi \in Hom(A'',B)$.

$\Rightarrow f^*g^*\varphi(a') = g^*\varphi(fa') = \varphi(g\circ f(a')) = \varphi(0) = 0 \quad \forall a' \in A'$

$\Rightarrow Im g^* \subset ker f^*$

(ii) $\ker f^* \subset \operatorname{Im} g^*$:

Seja $\varphi \in \ker f^* \Rightarrow \varphi(f(a')) = 0 \ \forall a' \in A'$

defina $\tilde{\varphi}: A'' \longrightarrow B$; $\tilde{\varphi}(a'') = \varphi(a)$ onde $g(a) = a''$

- $\tilde{\varphi}$ está bem definida:

  se $g(a_1) = a'' = g(a_2) \Rightarrow g(a_1 - a_2) = 0 \Rightarrow a_1 - a_2 = f(a')$

  $\Rightarrow \varphi(a_1 - a_2) = \varphi(f(a')) = 0 \Rightarrow \varphi(a_1) = \varphi(a_2)$

- $g^* \tilde{\varphi} = \varphi$ (por construção) $\square$

Def: Uma sequencia $0 \to A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} A'' \to 0$ é <u>split</u> (cinde) se $\exists\, \sigma: A'' \to A$ tal que

$$\boxed{g \circ \sigma = Id_{A''}}$$

Prop: Se $0 \to A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} A'' \to 0$ é split, então as sequencias abaixo são exatas:

(1) $0 \longrightarrow \operatorname{Hom}(A'', B) \xrightarrow{g^*} \operatorname{Hom}(A, B) \xrightarrow{f^*} \operatorname{Hom}(A', B) \longrightarrow 0$

(2) $0 \longrightarrow A' \otimes B \xrightarrow{f \otimes I} A \otimes B \xrightarrow{g \otimes I} A'' \otimes B \longrightarrow 0$

Dem:

(1) Basta mostrar que f^* é sobrejetora.

Seja $\sigma: A'' \longrightarrow A$ uma cisão (um splitting) & seja

$\omega_\sigma: A \longrightarrow A'$ definida por $\omega_\sigma(a) = a'$ onde

a' é o único elemento tal que $f(a') = (\underbrace{a - \sigma(g(a))}_{\in \ker g})$

Dado $\varphi \in \operatorname{Hom}(A', B)$, defina

$\tilde{\varphi}: A \longrightarrow B$

$\tilde{\varphi}(a) = \varphi(\omega_\sigma(a))$

$\Rightarrow f^* \tilde{\varphi}(a') = \tilde{\varphi}(f(a')) = \varphi(\omega_\sigma(f(a')) \overset{(*)}{=} \varphi(a')$

(*) Pois $f(a') - \sigma(gf(a')) = f(a')$

$\Rightarrow \omega_\sigma(f(a')) = a'$ $\square$

(2) Exercício!

Obs: se A'' é livre ($a'' \in A''$, $a'' \neq 0$, $na'' = 0 \Rightarrow n = 0$)

$\Rightarrow 0 \to A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} A'' \to 0$ é split. Basta definir σ nos geradores de A'' (Escolhe para cada gerador $a'' \in A''$ um $a \in A$ t.q. $g(a) = a''$. Define $\sigma(a'') = a$ & estende por linearidade.)

• Seja $(C_\cdot, \partial)$ complexo de cadeias. OBTEMOS:

• $(C_\cdot \otimes G, \partial \otimes Id_G)$ complexo de cadeias

• $(Hom(C_\cdot, G), \delta = \partial^*)$ complexo de co-cadeias

• Se $\phi : (A_\cdot, \partial_A) \longrightarrow (B_\cdot, \partial_B)$; $\partial_B \phi = \phi \partial_A$

$$\left.\begin{aligned} \Rightarrow \phi^* &: Hom(B_\cdot, G) \longrightarrow Hom(A, G) \\ \phi \otimes Id_G &: A_\cdot \otimes G \longrightarrow B_\cdot \otimes G \end{aligned}\right\} \text{são aplicações de cadeia}$$

$\Rightarrow$ Induzem:

$$\phi^* : H^\cdot(B, G) \longrightarrow H^\cdot(A, G)$$

$$\phi_* : H_\cdot(A, G) \longrightarrow H_\cdot(A, G)$$

(onde $H_\cdot(A, G) \stackrel{def}{=} H_\cdot(A \otimes G)$)

Logo, se $0 \to A_\cdot \to B_\cdot \to C_\cdot \to 0$ é sequencia curta exata split (e.g. se C_k é livre $\forall k$)

Este é o caso para todos os cplexos deste curso

σ (σ não é aplicação de cadeia!)

$$\left.\begin{aligned} \Rightarrow \quad 0 \longrightarrow Hom(C_\cdot, G) \longrightarrow Hom(B_\cdot, G) \longrightarrow Hom(A_\cdot, G) \to 0 \\ 0 \longrightarrow A_\cdot \otimes G \longrightarrow B_\cdot \otimes G \longrightarrow C_\cdot \otimes G \longrightarrow 0 \end{aligned}\right\} \text{exatas}$$

$\Rightarrow$ Sequencia longa exata em cohomologia (& homologia com coeficientes)

Exemplo: (Sequencia longa do Par)

Se $A \subset X$ esp. top. & $C_\cdot = C_\cdot^{sing}(X,A) \Rightarrow C_\cdot$ é livre gerado por $\{\sigma : \Delta^\cdot \to X \mid \operatorname{Im}\sigma \not\subset A\}$. Logo,

$$0 \to C_\cdot(A) \to C_\cdot(X) \to C_\cdot(X,A) \to 0 \quad \text{é split}$$

$\Rightarrow$ Sequencia longa exata em cohomologia

$$\cdots \to H^k(X,A;G) \to H^k(X,G) \to H^k(A,G) \xrightarrow{\delta^*} H^{k+1}(X,A;G) \to \cdots$$

• Resolução Projetiva:

Def: Um grupo abeliano P é projetivo se $\forall\ \underbrace{G \to G'' \to 0}_{\text{seq. exata de grupos abelianos}}$ & $\forall \pi : P \to G''$, $\exists \alpha : P \to G$ tal que

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "\exists\alpha"'] \arrow[d, "\pi"] & \\ G \arrow[r] & G'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

OBS: Se P é livre $\Rightarrow P$ é projetivo. (define α nos geradores e estende)

• Seja A um grupo abeliano.

Def: • Uma resolução projetiva de A é uma sequencia exata

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{n+1}} P_n \xrightarrow{\partial_n} P_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_2} P_1 \xrightarrow{\partial_1} P_0 \xrightarrow{\partial_0} A \to 0 \quad (*)$$

onde P_k é projetivo $\forall k$.

• Se P_k é livre $\forall k$ dizemos que $(*)$ é uma resolução livre.

Prop: Todo grupo abeliano A admite uma resolução livre $P_* \to A$ (notação)

Dem: Seja $P_0 = F(A)$ o grupo abeliano livre gerado por A, $\partial_0 : F(A) \to A$ a aplicação canônica. Seja $P_1 = F(\ker\partial_0)$ & ∂_1 dado por

$$\begin{tikzcd} F(\ker\partial_0) \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "\partial_1"'] & \ker\partial_0 \arrow[r] & F(A) \end{tikzcd}$$

Claramente, temos que $P_1 \xrightarrow{\partial_1} P_0 \xrightarrow{\partial_0} A \to 0$ é exato.

continuando indutivamente:

$$P_k = F(\operatorname{Ker} \partial_{k-1}); \quad \underbrace{P_k \to \operatorname{Ker} \partial_{k-1} \to P_{k-1}}_{\partial_k} = F(\operatorname{Ker}\partial_{k-2})$$

obtemos a resolução livre

$$\cdots \to P_{k+1} \to P_k \to P_{k-1} \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to A \to 0 \qquad \square$$

<u>OBS</u>: [<u>Fatos</u>]

1) Existe uma definição similar para R-módulos.
2) Se R é um DIP (domínio de ideais principais) então um R-módulo M é livre $\Leftrightarrow$ M é projetivo
3) $\mathbb{Z}$ é um DIP

Algebra Comutativa

4) Subgrupos de grupos livres são livres

<u>Conclusão</u>: No caso da proposição ($\mathbb{Z}$-módulos) a resolução livre é da forma

$$\cdots \to 0 \to 0 \to \underset{\substack{\| \\ R(A)}}{\operatorname{Ker}\partial_0} \to F(A) \to A \to 0$$

(uma sequencia curta exata)

$$0 \to R(A) \to F(A) \to A \to 0$$

<u>Lema</u>: (a) Sejam $P_* \to A$, $P'_* \to A'$ resoluções projetivas. Se $\alpha : A \to A'$ é homomorfismo, podemos estender α para uma aplicação de cadeias $\alpha_k : P_k \to P'_k$:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots \to & P_2 & \xrightarrow{\partial_2} & P_1 & \xrightarrow{\partial_1} & P_0 & \xrightarrow{\partial_0} & A & \to 0 \\
& \downarrow{\scriptstyle \alpha_2} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_1} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_0} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} & \\
\cdots \to & P'_2 & \xrightarrow{\partial'_2} & P'_1 & \xrightarrow{\partial'_1} & P'_0 & \xrightarrow{\partial'_0} & A' & \to 0
\end{array}$$

(b) Duas extensões α_* & α'_* de α são homotópicas (algebricamente)

(c) Se $P_* \to A$ & $P'_* \to A$ são resoluções de A, e G é um grupo abeliano $\Longrightarrow$ Existem isomorfismos canônicos

$$H^k(P_*, G) \cong H^k(P'_*, G) \quad \forall k.$$

Dem:

(a) Vamos definir α_k indutivamente.

α_0:

$$\begin{tikzcd}
& P_0 \arrow[d] \arrow[ddl, dashed, "\alpha_0"'] \\
& A \arrow[d] \\
P'_0 \arrow[r, "\partial_0"'] & A' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

suponha que já definimos $\alpha_k : P_k \longrightarrow P'_k$. Então

α_{k+1}:

$$\begin{tikzcd}
& P_{k+1} \arrow[d, "\alpha_k \circ \partial_{k+1}"] \arrow[dl, dashed, "\alpha_{k+1}"'] \\
P'_{k+1} \arrow[r, "\partial'_{k+1}"'] & \operatorname{Ker} \partial'_k \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

b) Sejam $\alpha_k, \beta_k : P_k \longrightarrow P'_k$ duas extensões de $\alpha : A \to A'$

Queremos construir $h_k : P_k \longrightarrow P'_{k+1}$ tal que

$$\alpha_k - \beta_k = \partial'_{k+1} h_k + h_{k-1} \partial_k$$

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\partial"] & P_{k+1} \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, shift right] \arrow[d, shift left] \arrow[dl, dashed] & P_k \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, shift right, "\alpha_k"'] \arrow[d, shift left, "\beta_k"] \arrow[dl, dashed, "h_k"'] & P_{k-1} \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, shift right] \arrow[d, shift left] \arrow[dl, dashed, "h_{k-1}"'] & \cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, shift right, "\alpha_1"'] \arrow[d, shift left, "\beta_1"] \arrow[dl, dashed] & P_0 \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, shift right, "\alpha_0"'] \arrow[d, shift left, "\beta_0"] \arrow[dl, dashed] & A \arrow[r] \arrow[d, shift right, "\alpha"'] \arrow[d, shift left, "\alpha"] \arrow[dl, dashed, "h_{-1}"'] & 0 \\
\cdots \arrow[r, "\partial'"'] & P'_{k+1} \arrow[r, "\partial'_{k+1}"'] & P'_k \arrow[r, "\partial'_k"'] & P'_{k-1} \arrow[r, "\partial'"'] & \cdots \arrow[r, "\partial'"'] & P'_1 \arrow[r, "\partial'"'] & P'_0 \arrow[r, "\partial'"'] & A' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Vamos construir indutivamente

- $h_{-1} : A \longrightarrow P'_0$: Queremos h_{-1} tal que $\underbrace{\alpha - \alpha}_{0} = \partial'_0 \circ h_{-1}$

  basta tomar $h_{-1} \equiv 0$

- Suponha que temos $h_{k-1} : P_{k-1} \longrightarrow P'_k$ tal que

$$\alpha_{k-1} - \beta_{k-1} = \partial'_k \circ h_{k-1} - h_{k-2} \circ \partial_{k-1}$$

Considere $\psi : P_k \longrightarrow P'_k$; $\psi = -\alpha_k + \beta_k + h_{k-1} \circ \partial_k$

$\Rightarrow \operatorname{Im} \psi \subset \operatorname{Ker} \partial'_k$ pois

$$\partial'_k \alpha_k - \partial'_k \beta_k = \alpha_{k-1} \circ \partial_k - \beta_{k-1} \circ \partial_k = (\alpha_{k-1} - \beta_{k-1}) \circ \partial_k =$$

$$= (\partial'_k \circ h_{k-1} - h_{k-2} \circ \partial_{k-1}) \circ \partial_k = \partial'_k \circ h_{k-1} \circ \partial_k$$

$$\Rightarrow \partial'_k \circ \psi = \partial'_k \circ h_{k-1} \circ \partial_k - \partial'_k \circ h_{k-1} \circ \partial_k = 0$$

Logo:

$$\begin{tikzcd} & P_k \arrow[dl, dashed, "h_k"'] \arrow[d, "\psi"] & \\ P'_{k+1} \arrow[r, "\partial'_{k+1}"'] & \operatorname{Ker} \partial'_k \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \quad \Rightarrow \alpha_k - \beta_k = \partial'_{k+1} \circ h_k - h_{k-1} \circ \partial_k$$

(c) Note que se temos

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & P_k \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_k"] & P_{k-1} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_{k-1}"] & \cdots \arrow[r] & P_0 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_0"] & A \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & 0 \\ \cdots \arrow[r] & P'_k \arrow[r] \arrow[d, "\beta_k"] & P'_{k-1} \arrow[r] \arrow[d, "\beta_{k-1}"] & \cdots \arrow[r] & P'_0 \arrow[r] \arrow[d, "\beta_0"] & A' \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & 0 \\ \cdots \arrow[r] & P''_k \arrow[r] & P''_{k-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P''_0 \arrow[r] & A'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

α_k extensão de α ; β_k extensão de β

$\Rightarrow \beta_k \circ \alpha_k : P_k \longrightarrow P''_k$ é extensão de $\beta \circ \alpha$

Logo, denotando por $\alpha^* : H^k(P'_*, G) \longrightarrow H^k(P_*, G)$

temos $(\beta \circ \alpha)^* = \beta^* \circ \alpha^*$ é functorial $(\alpha \circ \alpha^{-1})^* = Id^* = Id$

Agora basta estender Id_A ! $\square$