Aula 23

O TEOREMA DE BORSUK-ULAM

<u>Teorema</u>: Seja $f: S^n \to S^n$ uma função ímpar $(f(-x) = -f(x))$
$\Rightarrow \deg(f)$ é ímpar

<u>Corolário</u>: Seja $g: S^n \to \mathbb{R}^n$ contínua. Então existe $x \in S^n$ tal que $g(x) = g(-x)$

<u>Dem do Corolário</u>: Seja $f(x) = g(x) - g(-x)$. Temos que mostrar que $\exists x \in S^n$ t.q. $f(x) = 0$.

Suponha $f(x) \neq 0 \ \forall x$. Seja

$$F: S^n \longrightarrow S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$$
$$x \longmapsto \frac{f(x)}{\|f(x)\|}$$

$\Rightarrow F$ é ímpar $\Rightarrow F|_{S^{n-1}}: S^{n-1} \longrightarrow S^{n-1}$ é ímpar

$\Rightarrow \deg F|_{S^{n-1}}$ é ímpar.

Mas $F|_{S^{n-1}} \sim$ cte pois $F|_{D^n_+}$ é uma extensão de $F|_{S^{n-1}}$ à um disco. (D^n_+ = Hemisfério superior de S^n)

$\Rightarrow \deg(F|_{S^{n-1}}) = 0$ não é ímpar. Absurdo! $\square$

• <u>Construções & Lemas</u>:

• Seja $\varphi: G \to H$ homomorfismo de grupos abelianos

Considere

$$\varphi_\#: C_n(X, G) \longrightarrow C_n(X, H)$$
$$\sum g_i \sigma_i \longmapsto \sum \varphi(g_i) \sigma_i$$

Então

$$\varphi_{\#}\partial = \partial\varphi_{\#} \quad (\text{pois } \partial \text{ só "age" em } \sigma_i)$$

$\Rightarrow \varphi$ induz

$$\varphi_*: H_n(X,G) \longrightarrow H_n(X,H)$$

Note que φ_* é natural:

Se $f: X \to Y \Rightarrow$

$$\begin{tikzcd} H_n(X,G) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "\varphi_*"'] & H_n(Y,G) \arrow[d, "\varphi_*"] \\ H_n(X,H) \arrow[r, "f_*"'] & H_n(Y,H) \end{tikzcd}$$

Lema: Se $f: S^n \to S^n$ tem $\deg(f) = m$

$$\Rightarrow f_*: H_n(S^n,G) \longrightarrow H_n(S^n,G)$$
$$g \longmapsto m\cdot g$$

(Faz sentido pois G é um $\mathbb{Z}$-módulo $m\cdot g = \underbrace{g+\cdots+g}_{m}$)

Dem: Seja $\varphi_g: \mathbb{Z} \to G$ o homomorfismo $\varphi_g(k) = kg$

$$\Rightarrow \begin{tikzcd} H_n(S^n,\mathbb{Z}) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "\varphi_{g*}"'] & H_n(S^n,\mathbb{Z}) \arrow[d, "\varphi_{g*}"] \\ H_n(S^n,G) \arrow[r, "f_*"'] & H_n(S^n,G) \end{tikzcd}$$

$1 \longmapsto g$; $\quad 1 \longmapsto \deg f$; $\quad \deg f = m \longmapsto m\cdot g$

$$g \longmapsto f_*(g) = m\cdot g$$

□

Corolário: Seja $f: S^n \to S^n$. Então

$$\deg(f) \text{ é ímpar} \iff f_*: H_n(S^n,\mathbb{Z}_2) \longrightarrow H_n(S^n,\mathbb{Z}_2) \text{ é isomorfismo}$$

Dem: Seja $g \in \mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$

$$\Rightarrow f_*(g) = (\deg f)\, g = \begin{cases} g & \text{se } \deg f \text{ é ímpar} \\ 0 & \text{se } \deg f \text{ é par} \end{cases}$$

□

- <u>Transfer Sequence</u> (Caso Especial)

Suponha que $p : \tilde{X} \longrightarrow X$ é um recobrimento duplo.

- Como Δ^k é contrátil, se $\sigma : \Delta^k \to X$ é um simplexo singular, então existem exatamente dois levantamentos distintos $\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2 : \Delta^k \longrightarrow \tilde{X}$

$$\begin{tikzcd} & \tilde{X} \arrow[d, "p"] \\ \Delta^k \arrow[ur, bend left, "\tilde{\sigma}_1"] \arrow[ur, "\tilde{\sigma}_2"'] \arrow[r, "\sigma"'] & X \end{tikzcd}$$

seja $\tau : C_k(X, \mathbb{Z}_2) \longrightarrow C_k(\tilde{X}, \mathbb{Z}_2)$

$$\tau(\sigma) = \tilde{\sigma}_1 + \tilde{\sigma}_2$$

Obtemos uma sequencia curta exata

$$0 \longrightarrow C_k(X, \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\tau} C_k(\tilde{X}, \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{p_\#} C_k(X, \mathbb{Z}_2) \to 0$$

que induz uma sequencia longa em homologia

$$\cdots \longrightarrow H_k(X, \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\tau_*} H_k(\tilde{X}, \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{p_\#} H_k(X, \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\partial_*} H_{k-1}(X, \mathbb{Z}_2) \to \cdots$$

<u>Teorema</u> (Borsuk - Ulam)

Se $f : S^n \longrightarrow S^n$ é ímpar $\Rightarrow \deg f$ é ímpar

<u>Dem</u>: Vou mostrar que $f_* : H_n(S^n, \mathbb{Z}_2) \longrightarrow H_n(S^n, \mathbb{Z}_2)$ é ímpar.

Considere "transfer sequence" associada ao recobrimento

$$p: S^n \longrightarrow \mathbb{R}P^n :$$

$$\underset{\overset{\parallel}{0}}{H_{n+1}(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}_2)} \longrightarrow H_n(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}_2) \xrightarrow[\cong]{\tau_*} H_n(S^n;\mathbb{Z}_2) \xrightarrow[0]{p_*} H_n(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}_2) \xrightarrow[\cong]{\partial_*} H_{n-1}(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}_2) \to 0 \to \cdots$$

$$\cdots \to 0 \to H_i(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}_2) \xrightarrow[\cong]{\partial_*} H_{i-1}(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}_2) \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \to 0 \to H_1(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}_2) \xrightarrow[\cong]{\partial_*} H_0(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}_2) \xrightarrow[0]{\tau_*} H_0(S^n;\mathbb{Z}_2) \xrightarrow[\cong]{p_*} H_0(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}_2) \to 0$$

Note que: • Todos os grupos acima são 0 ou $\mathbb{Z}_2$

• Logo, todos os homomorfismos são 0 ou $\cong$

• Começando na linha de baixo:

p_* é $\cong$ (Isso é sempre o caso para $f: X \to Y$ conexo p/ caminhos)

$\Rightarrow \tau_* = 0$

• Na linha do meio é imediato & na linha de cima:

$\tau_*: \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2$ é injetor $\Rightarrow \tau_*$ é $\cong$

$\Rightarrow p_* = 0 \Rightarrow \partial_*$ é $\cong$

Seja $\bar{f}: \mathbb{R}P^n \longrightarrow \mathbb{R}P^n$. Temos que
$[x] \longmapsto [f(x)]$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C_k(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}_2) \arrow[r, "\tau_*"] \arrow[d, "\bar{f}_*"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft \; ①"] & C_k(S^n;\mathbb{Z}_2) \arrow[r, "p_*"] \arrow[d, "f_*"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft \; ②"] & C_k(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}_2) \arrow[r] \arrow[d, "\bar{f}_*"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_k(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}_2) \arrow[r, "\tau_*"'] & C_k(S^n;\mathbb{Z}_2) \arrow[r, "p_*"'] & C_k(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}_2) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Comutatividade de 1:

Seja $\sigma : \Delta^k \to \mathbb{R}P^n$

$\Rightarrow \tau(\bar{f}_* \sigma) = (\widetilde{\bar{f} \circ \sigma})_1 + (\widetilde{\bar{f} \circ \sigma})_2$ & $f_* \tau(\sigma) = f \circ \tilde{\sigma}_1 + f \circ \tilde{\sigma}_2$

Para ver que são iguais, note que cada termo tem um ponto em comum &

$$p \circ (\widetilde{\bar{f} \circ \sigma})_i = \bar{f} \circ \sigma \ , \quad p \circ (f \circ \tilde{\sigma}_i) = \bar{f} \circ \sigma$$

$$\begin{tikzcd}
 & S^n \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"] & S^n \arrow[d, "p"] \\
\Delta^k \arrow[ur, "\tilde{\sigma}_i"] \arrow[r, "\sigma_i"'] & \mathbb{R}P^n \arrow[r, "\bar{f}"'] & \mathbb{R}P^n
\end{tikzcd}$$

Comutatividade de 2:

$$\bar{f} \circ p = p \circ f$$

Logo, obtemos $f_* : H_k(S^n, \mathbb{Z}_2) \to H_k(S^n, \mathbb{Z}_2)$ &

$\bar{f}_* : H_k(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2) \longrightarrow H_k(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2)$ tal que na transfer sequence

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_k(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2) \arrow[r, "\tau_*"] \arrow[d, "\bar{f}_*"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & H_k(S^n, \mathbb{Z}_2) \arrow[r, "p_*"] \arrow[d, "f_*"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & H_k(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2) \arrow[r, "\partial_*"] \arrow[d, "\bar{f}_*"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & H_{k-1}(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2) \arrow[r] \arrow[d, "\bar{f}_*"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H_k(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2) \arrow[r, "\tau_*"] & H_k(S^n, \mathbb{Z}_2) \arrow[r, "p_*"] & H_k(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2) \arrow[r, "\partial_*"] & H_{k-1}(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Por indução em k, vou mostrar que $\bar{f}_* : H_k(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2) \longrightarrow H_k(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2)$ é $\cong$

- $k=0$: $\bar{f}_* : H_0(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2) \longrightarrow H_0(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2)$ é $\cong$ (Pois $\bar{f} : \mathbb{R}P^n \to \mathbb{R}P^n$)

- Suponha $\bar{f}_* : H_k(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2) \longrightarrow H_k(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2)$ é $\cong$

  Na transfer sequence temos

$$\begin{tikzcd}
H_{k+1}(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2) \arrow[r, "\partial_*", "\cong"'] \arrow[d, "\bar{f}_*"] & H_k(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2) \arrow[d, "\cong", "\bar{f}_*"'] \\
H_{k+1}(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2) \arrow[r, "\cong", "\partial_*"'] & H_k(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2)
\end{tikzcd} \Rightarrow \bar{f}_* : H_{k+1}(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2) \circlearrowleft \text{ é } \cong$$

Finalmente, da transfer sequence temos

$$\begin{tikzcd} H_n(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) \arrow[r, "\tau_*", "\cong"'] \arrow[d, "\bar{f}_*"', "\cong"] & H_n(S^n; \mathbb{Z}_2) \arrow[d, "f_*"] \\ H_n(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) \arrow[r, "\cong", "\tau_*"'] & H_n(S^n; \mathbb{Z}_2) \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow f_*$ é $\cong$ $\Rightarrow$ $\deg f$ é ímpar $\square$