Aula 20
Complexos CW

- Ideia: Construir espaços topológicos de maneira indutiva:

 1) X_0 = conjunto discreto de pontos

 2) Dado X_{k-1}, construímos X_k "colando" discos D^k em X_{k-1} através de $\chi : S^{k-1} \to X_{k-1}$

 3) $X_0 \subset X_1 \subset \ldots\ldots \subset X$

I) Reconhecendo Células

- Seja X um espaço topológico Hausdorff.

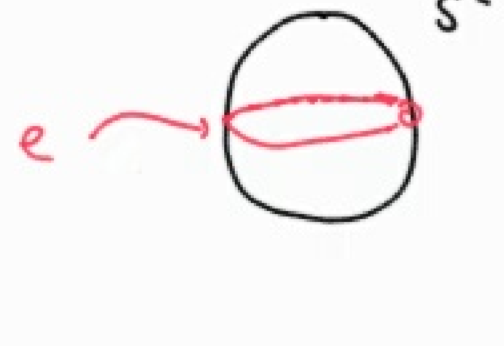
Def: Uma n-célula aberta em X é um par $(e, \mathring{h}_e)$ onde $e \subset X$ é um subspaço & $\mathring{h}_e : \mathring{D}^n \longrightarrow e$ é um homeomorfismo.

CUIDADO: $e \subset X$ não precisa ser aberto!

Exemplo Em $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1\}$

- $e \subset S^2$, $e = \{(\cos 2\pi t, \operatorname{sen} 2\pi t, 0) \mid t \in (0,1)\}$

$$\mathring{h}_e : (0,1) \longrightarrow e \ , \ \mathring{h}_e(t) = (\cos 2\pi t, \operatorname{sen} 2\pi t, 0)$$



<u>Def</u>: Uma n-célula aberta é uma <u>n-célula</u> se $\mathring{h}_e : \mathring{D}^n \to e$ se estende à uma aplicação contínua $h_e : D^n \longrightarrow X$

<u>OBS</u>: Nem toda n-célula aberta é uma n-célula. Por exemplo, se $e \subset X$ é uma célula $\Rightarrow \bar{e} \subset X$ é compacto. Logo, $(0,+\infty) \subset \mathbb{R}$ é uma célula aberta que não é 1-célula (Exercício!!!)

<u>OBS</u>: Se $\mathring{h}_e : \mathring{D}^n \to e$ se estende para $h_e : D^n \to X$

$\Longrightarrow$ a extensão é única (por continuidade)

Logo,

<u>Def (Alternativa)</u> Uma n-célula em X é uma aplicação contínua

$$h_e : D^n \longrightarrow X \qquad \text{tal que } \mathring{h}_e : \mathring{D}^n \longrightarrow h_e(\mathring{D}^n) \subset X$$

é homeomorfismo.

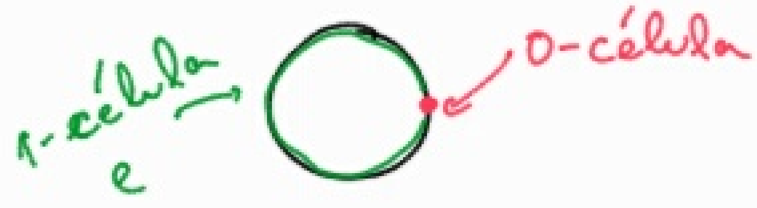
<u>Nomeclatura / Definição</u>

- $h_e : D^n \longrightarrow X$ é a <u>aplicação definidora</u> de $e \subset X$
- $\partial_{cell}(e) = \bar{e} - e$ é a <u>fronteira celular</u> de e
- $\chi_e = h_e\big|_{\partial D^n} : S^{n-1} \longrightarrow X$ é a <u>aplicação característica</u> de e

Primeiros Exemplos:

- $n=0$: 0-célula em X = pto de X

- Em S^1:

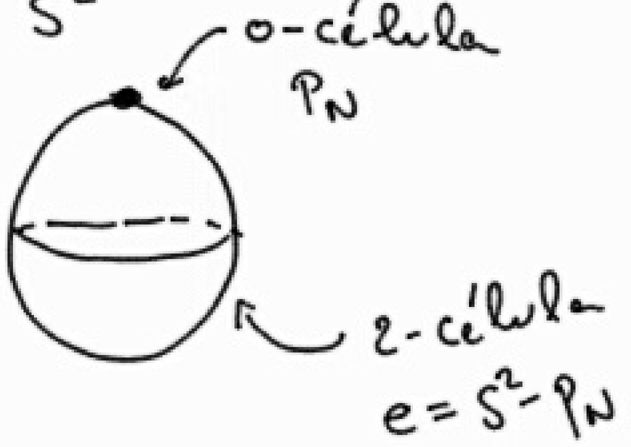


$e = S^1 - \{(1,0)\}$

$h_e : [0,1] \longrightarrow S^1$

$t \longmapsto (\cos 2\pi t, \operatorname{sen} 2\pi t)$

- Em S^2



OBS: Uma forma de descrever h_e explicitamente (isso não é importante!)

Identifica:

$$S^2 = \Sigma S^1$$

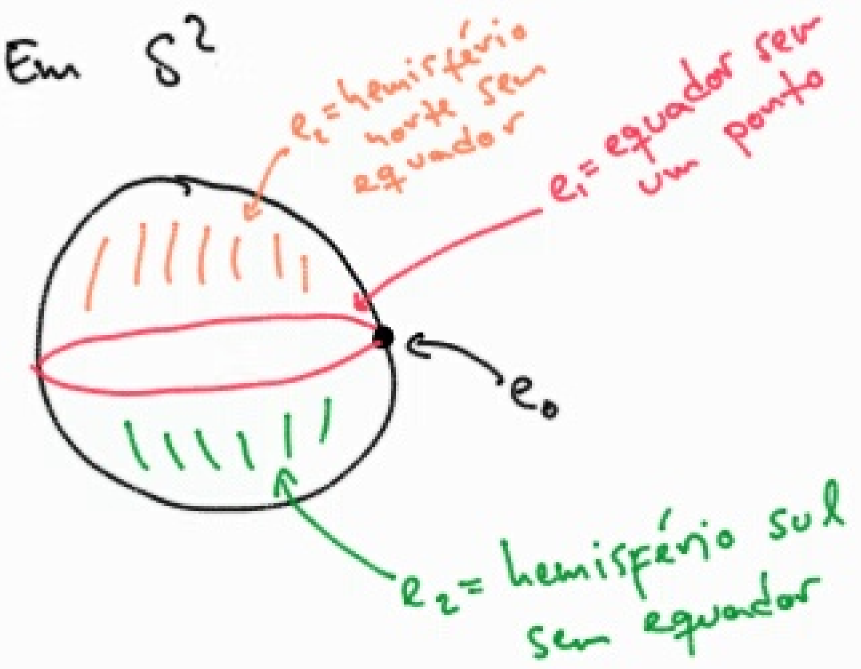
$$D^2 = \mathrm{Con}(S^1) = \frac{S^1 \times [-1,1]}{S^1 \times \{-1\}}$$

$$\Rightarrow S^2 \cong \underbrace{\mathrm{Con}(S^1)}_{D^2} \Big/ S^1 \times \{1\}$$

$\Rightarrow h_e : D^2 \to S^2$ é a aplicasão quociente.

(Na verdade, isso é só uma forma complicada de dizer que $S^2 \cong D^2/\partial D^2$)

- Em S^2



Propriedades Topológicas (Exercício)

Se (e, h_e) é n-célula de X, então:

1) $h_e(D^n) = \overline{e}$
2) $h_e(S^{n-1}) = \partial_{cell}(e)$
3) $h_e : D^n \longrightarrow \overline{e}$ é uma aplicação quociente.

II) Colando uma n-célula:

- X Hausdorff, $A \subset X$ subespaço fechado

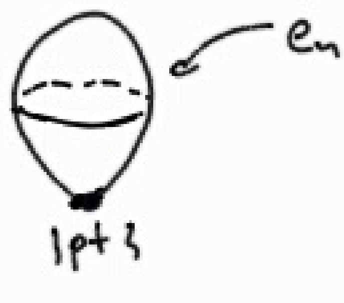
Def: X é obtido de A colando uma n-célula se existir uma n-célula $(e, h_e) \subset X$ tal que

$$X = A \cup e \, , \quad A \cap e = \phi$$

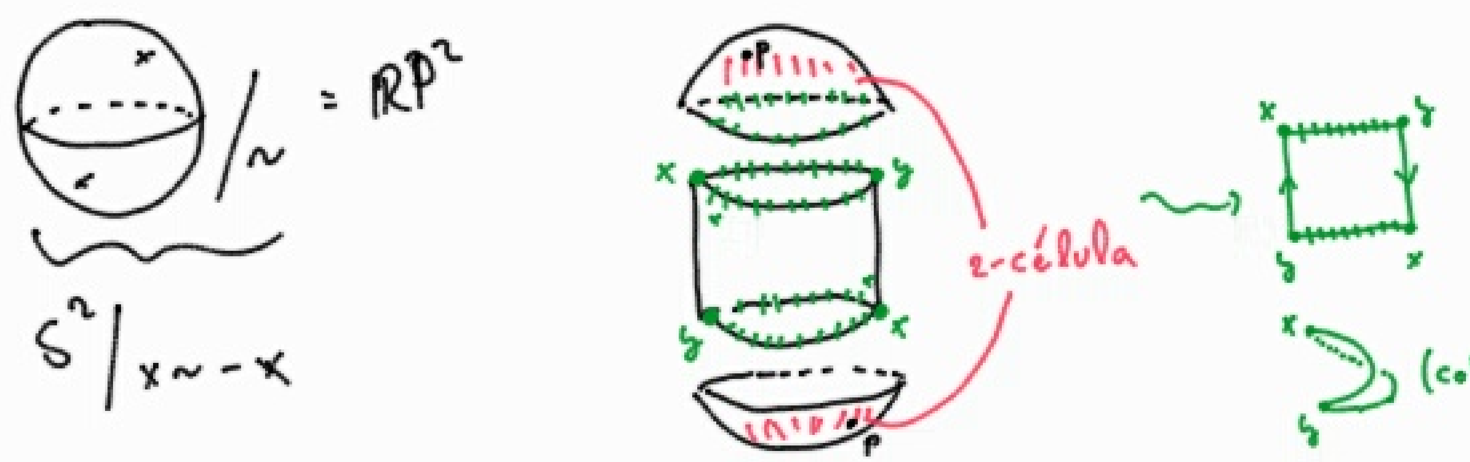
Exemplos:

1) D^n é obtido de S^{n-1} colando uma n-célula
$$e = \mathring{D}^n \, , \quad h_e = Id_{D^n}$$

2) S^n é obtido de $\{pt\}$ colando uma n-célula

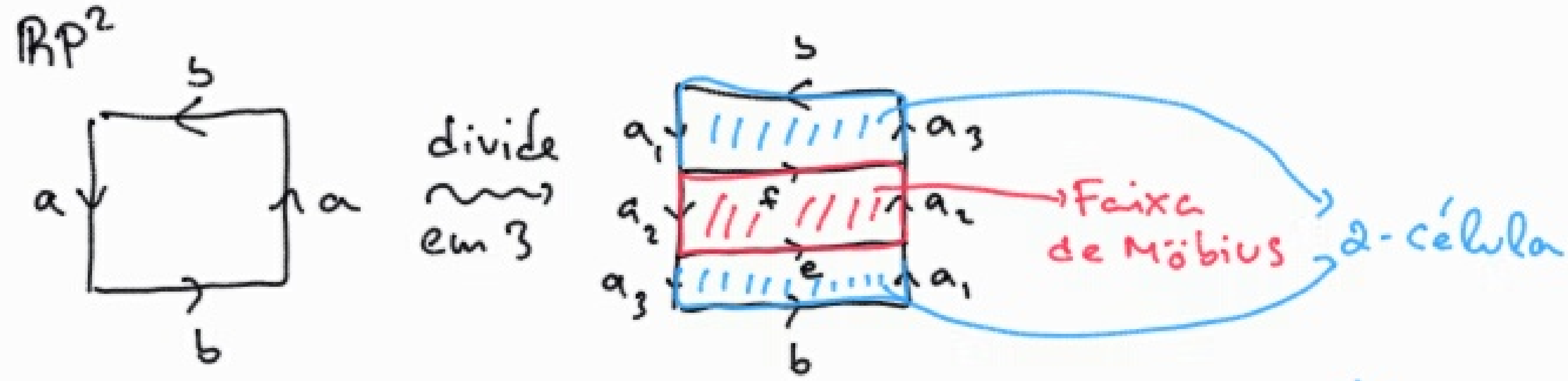


3) $\mathbb{RP}^2$ é obtido de uma faixa de Möbius colando uma 2-célula

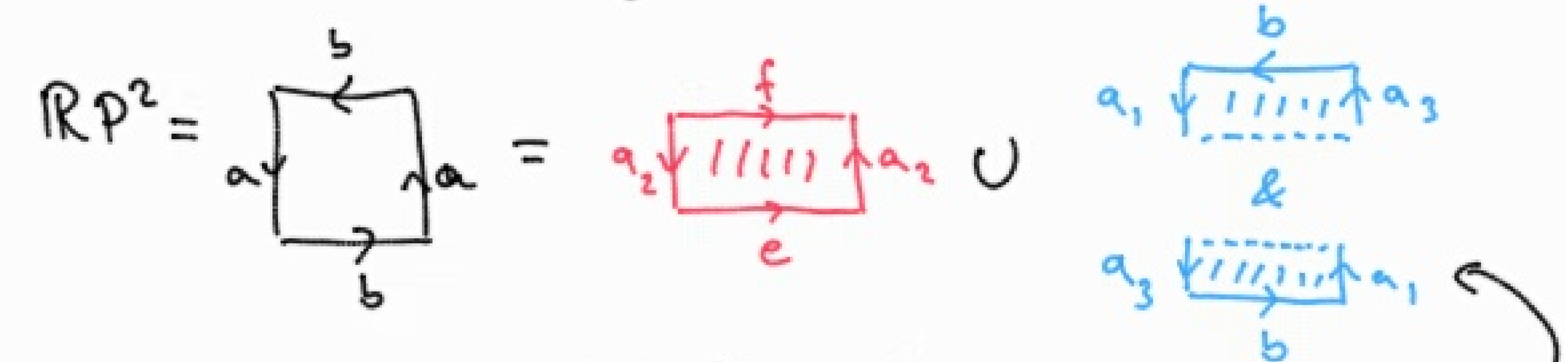


Ver prox. página

• Mais esquemático:

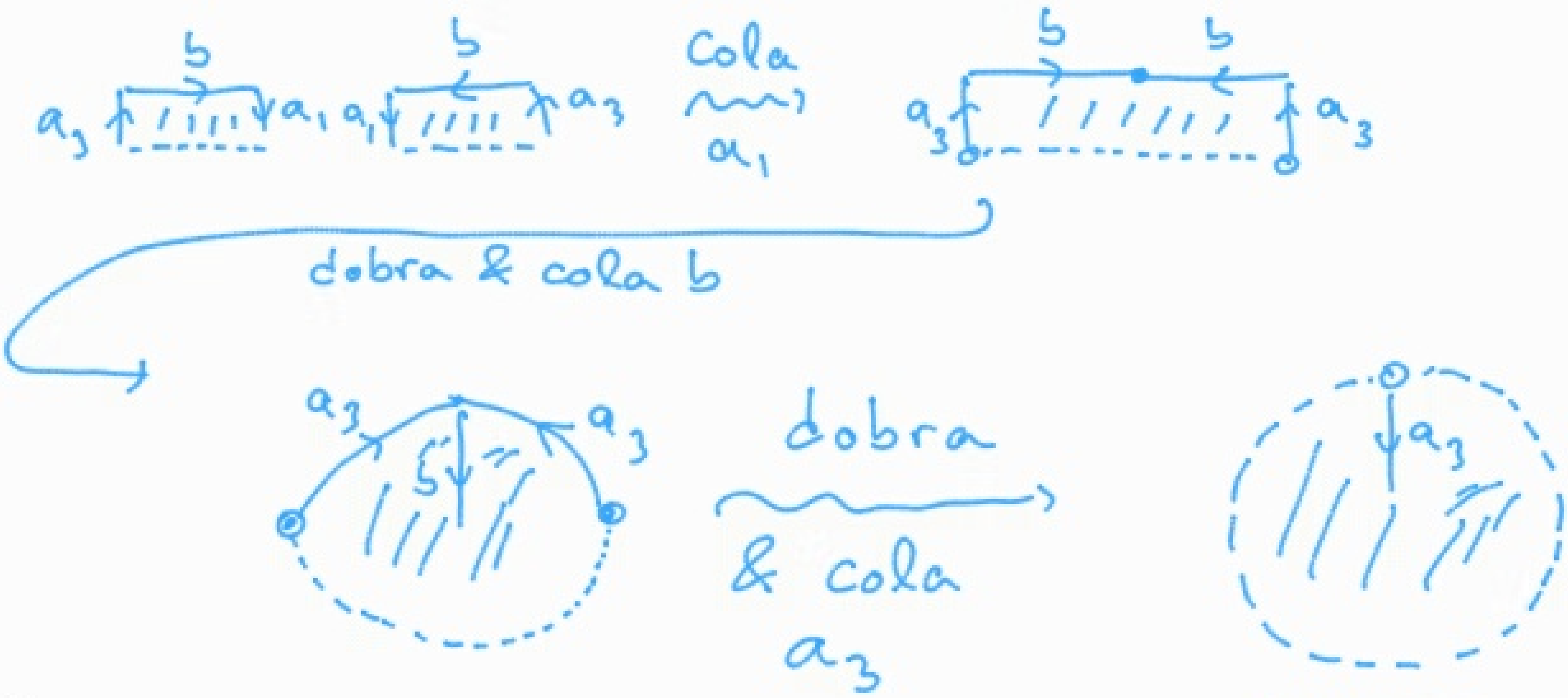


ou seja: $\mathbb{RP}^2 =$



vamos ver que ao fazer as identificasões no desenho azul obtemos um disco aberto:

• "Vira" a parte de baixo para poder colar a_1 em cima e em baixo



Disco Aberto!

• Note que

$$h_e : D^2 \longrightarrow \mathbb{RP}^2,$$

$$\chi_e = h_e\big|_{S^1 = \partial D^2} = fe$$

De outra forma:

Se $\pi : S^2 \longrightarrow \mathbb{RP}^2$ é a aplicasão quociente e $D^2 = \{(x,y,z) \in S^2 \mid z \geq 1/2\}$

$\Rightarrow h_e = \pi|_{D^2}$.

Prop: Seja $X = D^n$ ou $X = I^n = [0,1] \times \dots \times [0,1]$.
Seja Y um espaso obtido de X por alguma relasão de equivalência em $\partial X = S^{n-1}$. Assuma que Y é Hausdorff.
Se $\pi : X \longrightarrow Y$ é a aplicasão quociente e $B = \pi(\partial X) \subset Y \Rightarrow Y$ é obtido de B colando uma n-célula.

Dem: $D^n \cong I^n$ por um homeomorfismo que preserva ∂X
$\Rightarrow$ podemos tratar somente do caso $X = D^n$

- Seja $h_e = \pi : D^n \longrightarrow Y$ a aplicasão quociente

$\Rightarrow e = h_e(\mathring{D}^n)$ é uma n-célula & $B = h_e(\partial D^n)$

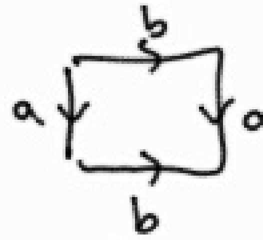
$\Rightarrow Y = e \cup B \quad , \quad e \cap B = \phi$

OBS: Note que $\mathring{h}_e : \mathring{D}^n \longrightarrow e$ pois não há identificasão em $\mathring{D}^n$

& $B \cap e = \phi$ pois não há identificasão entre pontos de ∂D^n com pontos de $\mathring{D}^n$

Exemplos:

1) T^2 é obtido de $S^1 \vee S^1$ colando uma 2-célula



$\rightsquigarrow \quad B = (\partial D^2)/\sim \; =$

$$h_e\big|_{\partial D^2} = \chi_e = aba^{-1}b^{-1}$$

2) $T_g = T \# \cdots \# T$ é obtido de $\underbrace{S^1 \vee \cdots \vee S^1}_{2g\text{-vezes}}$ colando uma 2-célula com $\chi_e = a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$

3) $\mathbb{R}P^2_h = \underbrace{\mathbb{P}^2 \# \cdots \# \mathbb{P}^2}_{h}$ é obtido de $\underbrace{S^1 \vee \cdots \vee S^1}_{h}$ colando 2-célula com $\chi_e = a_1^2 a_2^2 \cdots a_h^2$

<u>Exercício</u>: Mostre que

1) A faixa de Möbius M pode ser obtida de

 colando uma 2-célula. Descreva χ_e

2) S^2 é obtido de $[0,1]$ colando 2-célula. Descreva χ_e

<u>Exemplo</u>: $\mathbb{R}P^n$ é obtido de $\mathbb{R}P^{n-1}$ colando uma n-célula

 $S^n/x \sim -x \rightsquigarrow$  $D^n/\sim$ onde $\sim$ é relação em $\partial D^n = S^{n-1}$

Usa a proposição

$$\mathbb{R}P^n = \underbrace{\partial D^n/\sim}_{\mathbb{R}P^{n-1}} \cup e^n$$

<u>Note que</u>: $\chi_e : S^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}P^{n-1}$ é o recobrimento de duas folhas.

$\chi_e = h_e|_{\partial D^n}$

III) Aplicação Característica

Se X é obtido de A colando uma n-célula e

$\chi_e : S^{n-1} = \partial D^n \longrightarrow A$ é a aplicação característica

$$\Rightarrow \quad \begin{tikzcd} S^{n-1} \arrow[r, hook] \arrow[d, "\chi_e"'] & D^n \arrow[d, "h_e"] \\ A \arrow[r, hook] & X \end{tikzcd} \qquad (*)$$

Podemos reconstruir X a partir de A & χ_e.

De fato, $(*)$ é um push-out

Teorema: Se A é Hausdorff & $\chi : S^{n-1} \longrightarrow A$ contínua

Então existe um único espaço X (a menos de homeo) obtido de A colando uma n-célula com aplicação característica χ

Dem: Vai seguir da propriedade universal usando push-out, com $X = A \cup_{\chi} D^n = A \sqcup D^n / \sim$ onde $x \in S^{n-1}$, $x \sim \chi(x) \in A$

Prop: (Propriedade Universal)

Se X é obtido de A colando n-célula (e, h_e), e Y é espaço topológico (todos espaços Hausdorff)

$$\Rightarrow \quad \begin{tikzcd} S^{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\chi_e"'] & D^n \arrow[d, "h_e"] \arrow[ddr, bend left, "f_e"] & \\ A \arrow[r, "i"] \arrow[drr, bend right, "f_A"'] & X \arrow[dr, dashed, "\exists! f"] & \\ & & Y \end{tikzcd}$$

Dem:

- f é único:

$$X = A \cup \operatorname{Im} h_e, \quad A \cap \operatorname{Im} h_e = \partial_{cell}(e) = \operatorname{Im} \chi_e$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(a) = f_A(a) & \forall a \in A \\ f(x) = f_e(p) & \text{onde } p \in D^n,\ h_e(p) = x,\ \forall x \in \operatorname{Im} h_e \end{cases}$$

(bem definido pois $h_e\big|_{\mathring{D}^n}$ é $\cong$ & $h_e\big|_{\partial D^n} = \chi_e$)

A formula acima determina f. Temos que ver que f é contínua:

Seja $F \subset Y$ fechado

$$\Rightarrow f^{-1}(F) = \underbrace{f_A^{-1}(F)}_{\substack{\text{fechado em } A \\ \& \ A \subset X \text{ fechado (Exercício!)} \\ \Rightarrow \text{ fechado em } X}} \cup\, h_e\big(\underbrace{f_e^{-1}(F)}_{\text{fechado em } D^n}\big)$$

fechado em D^n
$\Rightarrow$ compacto
$\Rightarrow h_e(f_e^{-1}(F))$ compacto
$\Rightarrow$ fechado em X pois X é Hausdorff

$\Rightarrow f$ é contínua.

Exercício: Seja $X = A \cup_{\chi} D^n$.

- Mostre que X é Hausdorff.
- Mostre que X satisfaz a prop. universal.
- Conclua a dem. do teorema.