Aula 2: Grupo Fundamental

Ideia:

X esp. top., $x \in X$

($\Rightarrow$ (X, x) é um espaço pontuado)

$$\Omega(X, x) = \{ \gamma : I \longrightarrow X \mid \gamma(0) = x = \gamma(1) \}$$

$\Omega(X, x) \subset C(I, X) \Rightarrow$ vem com a topologia de subespaço

Exercício: Mostre que se $f : X \to Y$ é um homeomorfismo $\Rightarrow$ f induz $f_\# : \Omega(X, x) \xrightarrow{\cong} \Omega(Y, f(x))$

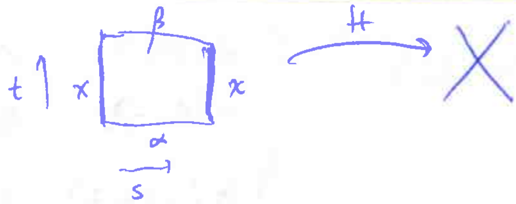
Ideia: Estudar {comp. conexas por caminhos de $\Omega(X, x)$}

- Para X razoável $\Rightarrow$

$\{ [\gamma] \mid \gamma \in \Omega(X, x) \}$ mas com $[\gamma]$ = classe de homotopia rel ∂I

Para que o "caminho de caminhos" fique em $\Omega(X, x)$

Lembre da aula passada:



$\alpha, \beta \in \Omega(X, x)$

$\Rightarrow \alpha \sim \beta$ rel ∂I se $\exists$ $H : I \times I \longrightarrow X$

$$H(s, 0) = \alpha(s)$$
$$H(s, 1) = \beta(s)$$
$$H(0, t) = H(1, t) = x$$

Def: $\pi_1(X,x) = \{ [\gamma] \mid \gamma \in \Omega(X,x) \}$

Prop: $\pi_1(X,x)$ é um grupo com

Produto: $[\alpha]\cdot[\beta] = [\alpha * \beta]$ $\qquad \alpha*\beta(s) = \begin{cases} \alpha(2s) & 0\le s\le 1/2 \\ \beta(2s-1) & 1/2 \le s \le 1 \end{cases}$

Elemento Neutro $\quad 1 = [c_x]$ $\qquad c_x(s) = x \quad \forall s$

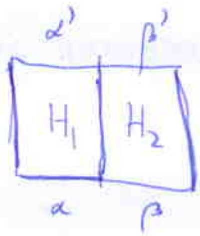
Inversa $\quad [\alpha]^{-1} = [\bar\alpha]$ $\qquad \bar\alpha(s) = \alpha(1-s)$

Dem:

1) Produto está bem definido:

$$\begin{cases} \alpha \underset{H_1}{\sim} \alpha' \\ \beta \underset{H_2}{\sim} \beta' \end{cases} \Rightarrow \quad \alpha*\beta \underset{H}{\sim} \alpha' * \beta'$$

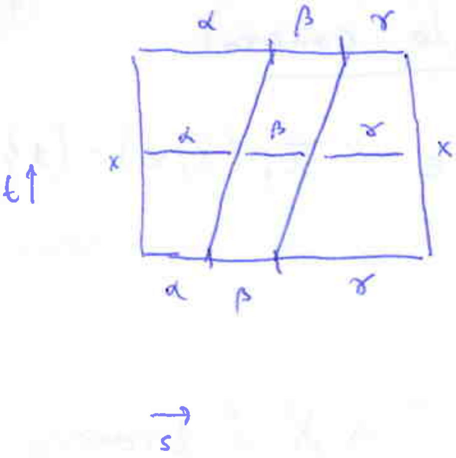
$$H(s,t) = \begin{cases} H_1(2s,t) & \text{se } 0\le s\le 1/2 \\ H_2(2s-1,t) & \text{se } 1/2\le s\le 1 \end{cases}$$



2) Associativo

$$(\alpha*\beta)*\gamma(s) = \begin{cases} \alpha(4s) & 0\le s\le 1/4 \\ \beta(4s-1) & 1/4 \le s\le 1/2 \\ \gamma(2s-1) & 1/2\le s\le 1 \end{cases}$$

$$\alpha*(\beta*\gamma)(s) = \begin{cases} \alpha(2s) & 0\le s\le 1/2 \\ \beta(4s-2) & 1/2\le s\le 3/4 \\ \gamma(4s-3) & 3/4\le s\le 1 \end{cases}$$

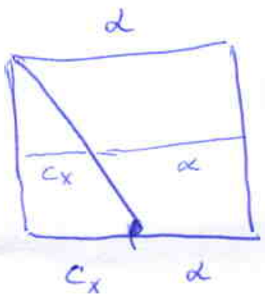


$$H(s,t) = \begin{cases} \alpha\left(\dfrac{4s}{t+1}\right) & 0 \le 4s \le t+1 \\ \beta\,(4s-t-1) & t+1 \le 4s \le t+2 \\ \gamma\left(\dfrac{4s-t-2}{2-t}\right) & t+2 \le 4s \le 4 \end{cases}$$

3) $1 \cdot [\alpha] = [\alpha]$, $[\alpha] \cdot 1 = [\alpha]$

ou seja

$c_x * \alpha \sim \alpha$

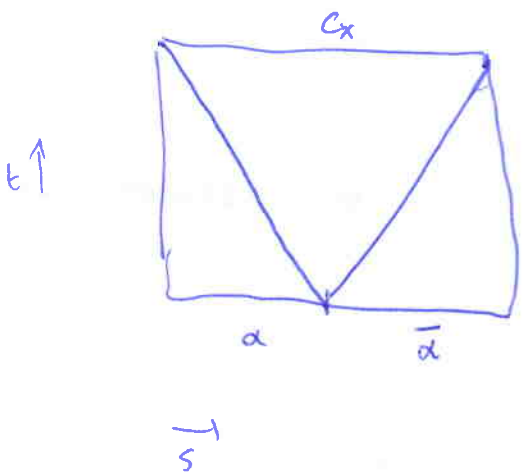


$$H(s,t) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \le 2s \le 1-t \\ \alpha\left(\dfrac{2s-1+t}{1+t}\right) & 1-t \le 2s \le 2 \end{cases}$$

4) $[\alpha] \cdot [\alpha]^{-1} = [c_x]$ Cuidado: esse é um pouco diferente

ou seja

$\alpha * \bar{\alpha} = c_x$) em tempo t



$$H(s,t) = \begin{cases} \alpha(2s) & 0 \le 2s \le 1-t \\ \alpha(1-t) & 1-t \le 2s \le 1+t \\ \bar{\alpha}(2s-1) & 1+t \le 2s \le 2 \end{cases}$$

OBS: Todas as homotopias se rel ∂I

Def: X é <u>1-conexo</u> (ou <u>simplesmente conexo</u>)

se X é conexo por caminhos e $\pi_1(X,x)=\{1\}$

para algum $x \in X$.

Exercício: • Mostre que X contrátil $\Rightarrow X$ é 1-conexo

• Mostre que $\pi_1(X \times Y, (x,y)) \cong \pi_1(X,x) \times \pi_1(Y,y)$.

Pergunta: Essa definição depende de $x \in X$? Ou

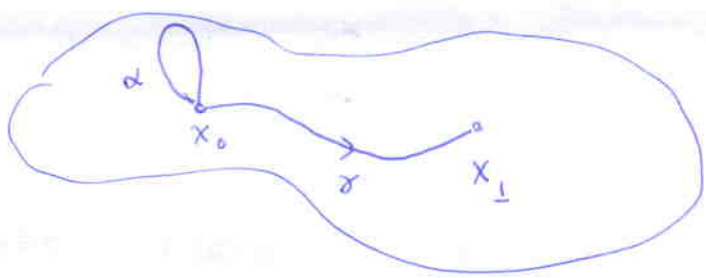
como relacionar $\pi_1(X,x_0)$ com $\pi_1(X,x_1)$?

Suponha X conexo por caminhos.

Fixe $\gamma : I \longrightarrow X$ $\gamma(0)=x_0$; $\gamma(1)=x_1$

$$\Rightarrow \quad A_\gamma : \pi_1(X,x_0) \longrightarrow \pi_1(X,x_1)$$

$$A_\gamma([\alpha]) = [\bar{\gamma} * \alpha * \gamma]$$

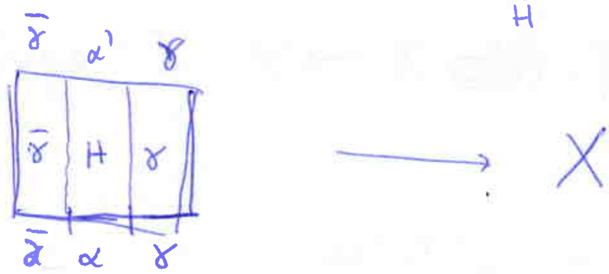


Prop: A_γ está bem definido e é um isomorfismo

com $A_\gamma^{-1} = A_{\bar{\gamma}}$

Dem: $\alpha \underset{H}{\sim} \alpha' \Rightarrow \bar{\gamma} * \alpha * \gamma \underset{\tilde{H}}{\sim} \bar{\gamma} * \alpha' * \gamma$

$\tilde{H}$:



ou seja $\tilde{H} = \bar{\gamma} * H * \gamma$

$$A_{\bar{\gamma}}[A_\gamma \alpha] = [\gamma\bar{\gamma} * \alpha * \gamma\bar{\gamma}] = [\alpha] \quad (\text{Exercício})$$

OBS: O isomorfismo não é canônico, Depende da escolha de γ, mas:

Exercício: Mostre que

1) $\gamma \sim \gamma'$ rel $(\partial I) \Rightarrow A_\gamma = A_{\gamma'}$

2) se $\pi_1(X, x)$ é abeliano $\Rightarrow A_\gamma$ não depende de γ

OBS: Segue que X é 1-conexo não depende de $x \in X$.

Propriedades Funcionais:

1) Se $f : (X, x) \longrightarrow (Y, y)$ (ou seja $f : X \to Y$, $f(x) = y$)

$\Rightarrow f_\# : \pi_1(X, x) \longrightarrow \pi_1(Y, y)$ é homomorfismo de grupos
$[\alpha] \longmapsto [f \circ \alpha]$

2) $Id_\# = Id$, $(f \circ g)_\# = f_\# \circ g_\#$

Exercício: (Fim da aula)!

- Mostre que se $f: X \to Y$ é equiv. de homotopia

$$\Rightarrow \quad f_\# : \pi_1(X, x) \longrightarrow \pi_1(Y, f(x)) \quad \text{é } \cong$$

- **OBS:** · Cuidado com o ponto base.
  · Ajuda provar que $f \sim g \text{ rel } \{x\} \Rightarrow$
  $$f_\# = g_\#$$

Prop: Se $r: X \longrightarrow A \subset X$ é uma retração

$$\Rightarrow \quad r_\# : \pi_1(X, a) \longrightarrow \pi_1(A, a) \quad \text{é sobrejetora.}$$

Dem: $r \circ i = Id_A \Rightarrow r_\# \circ i_\# = Id_{\pi_1(A,a)}$

$\Rightarrow$ $i_\#$ é inversa à direita de $r_\#$

$\Rightarrow$ $r_\#$ é sobrejetora.

- Vamos ver na próxima aula que $\pi_1(S^1, p) \cong \mathbb{Z}$. Vamos usar isso agora:

Prop: Não existe retração de D^2 em $S^1 = \partial D^2$

Dem: $\left.\begin{array}{l} \pi_1(D^2, p) = \{1\} \\ \pi_1(S^1, p) = \mathbb{Z} \end{array}\right\}$ Não $\nexists$ função sobrejetora.

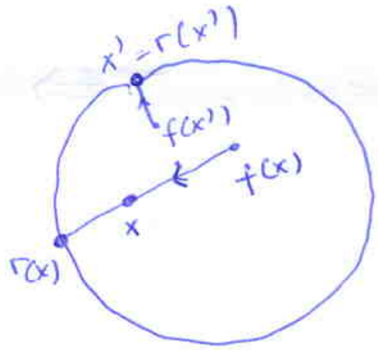
Consequencia:

Teorema do ponto fixo de Brouwer

Seja $f: D^2 \longrightarrow D^2 \Rightarrow \exists x \in D^2$ t.q. $f(x) = x$

Dem: Suponha que f não tem pontos fixos.

Vamos construir uma retração $r: D^2 \longrightarrow S^1 = \partial D^2$



$\blacksquare$

Homotopia relativa vs Homotopia Livre

Def: • Um par de espaços top. é (X, A) com $A \subset X$ subespaço

• Uma aplicação de pares é

$$f : (X, A) \longrightarrow (Y, B) \qquad \left(\begin{array}{l} f: X \to Y \\ f(A) \subset B \\ \cancel{f(A) \subset B} \\ \cancel{f|_A : A \to B} \text{ cont.} \end{array} \right)$$

• Uma homotopia entre $f, g : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ é uma $H : X \times I \longrightarrow Y$ t.q.

$$H(A \times I) \subset B$$

• Se $A = x \Rightarrow (X, x)$ é um espaço pontuado.
(x = pto base)

Seja

$$S^1 = \{(\cos 2\pi s, \sin 2\pi s) \in \mathbb{R}^2 \mid s \in [0,1]\}$$

$\Rightarrow \quad S^1 \cong [0,1]/\sim \qquad 0 \sim 1$

$\Rightarrow$ temos $q : [0,1] \longrightarrow S^1$ aplicação quociente.

Segue que $h : S^1 \longrightarrow X$ é contínua $\Leftrightarrow$ $h \circ q : I \to X$ é contínua

$$\begin{tikzcd} I \arrow[d, "q"'] \arrow[dr, "h\circ q"] & \\ S^1 \arrow[r, "h"'] & X \end{tikzcd}$$

Considere o espaço pontuado

$$(S^1, 1)$$

Então $\Omega(X,x) = \{\gamma : (S^1,1) \longrightarrow (X,x)\}$ $\quad \alpha\beta\gamma$

$\pi_1(X,x) = [(S^1,1),(X,x)]$ $\quad$ (classes de homotopias pontuadas)

<u>Def</u>: Duas funções $\alpha, \beta : (S^1,1) \longrightarrow (X,x)$ são <u>livremente homotópicas</u> se são homotopicas como funções $S^1 \longrightarrow X$ (sem ser homotopia pontuada)

Obs: $\alpha \sim \beta$ rel $\{1\} \Rightarrow \alpha \sim \beta$ (livre)

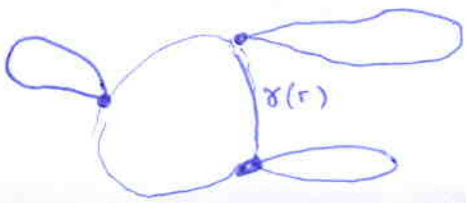
Prop: Se $\alpha, \beta : (S^1, 1) \longrightarrow (X, x)$ são livrementente homotópicas

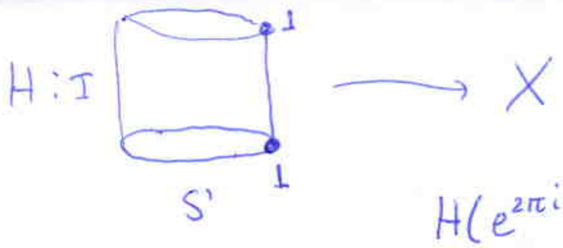
$\Rightarrow$ $[\alpha]$ é conjugada à $[\beta]$ em $\pi_1(X, x)$.

Dem: Seja H homopia livre entre α e β

Seja

$\gamma(r) = H(1, r)$ (laço percorrid por x na homotopia)





$H(e^{2\pi i s}, 0) = \alpha(e^{2\pi i s})$

$H(e^{2\pi i s}, 1) = \beta(e^{2\pi i s})$

$\Rightarrow$ $H(1, 0) = \alpha(1) = x$

$H(1, 1) = \beta(1) = x$

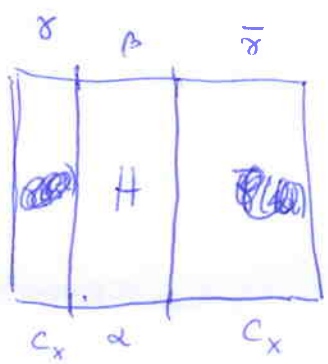
$H(1, r)$ descreve um laço

Vamos construir uma homotopia

$\tilde{H}$ entre

$$\alpha \sim (c_x * \alpha) * c_x \sim (\gamma * \beta) * \bar{\gamma}$$

$$\tilde{H}(s,t) = \begin{cases} \gamma(4st) & \text{se } 0 \leq s \leq 1/4 \\ H(4s-1,t) & \text{se } 1/4 \leq s \leq 1/2 \\ \underbrace{\gamma(2t(1-s))}_{\bar{\gamma}(2ts)} & \text{se } 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases}$$



<u>Corolário</u>:

1) Se $\pi_1(X,x)$ é abeliano

$\Rightarrow$ $\alpha \sim \beta$ rel $\{1\}$ $\Leftrightarrow$ $\alpha \sim \beta$

2) Se $\forall \alpha : (S^1, 1) \to (X,x)$, $\alpha \sim c_x$ (livre)

$\Rightarrow$ $\pi_1(X,x) = \{1\}$

Exercício:

Mostre que se $f, g : (X, x) \to (Y, y)$ são livremente homotópicas

$\Rightarrow$ $f_\#$ & $g_\#$ diferem por uma conjugação.

Conclua que se $f : X \to Y$ é equiv. de homot.

$\Rightarrow$ $f_\# : \pi_1(X, x) \longrightarrow \pi_1(Y, f(x))$ é iso.