

(Dualidade de Jordan-Alexander
e o Teorema da Curva de Jordan)

Sejam $F_1, F_2 \subset \mathbb{R}^n$ subconjuntos fechados.

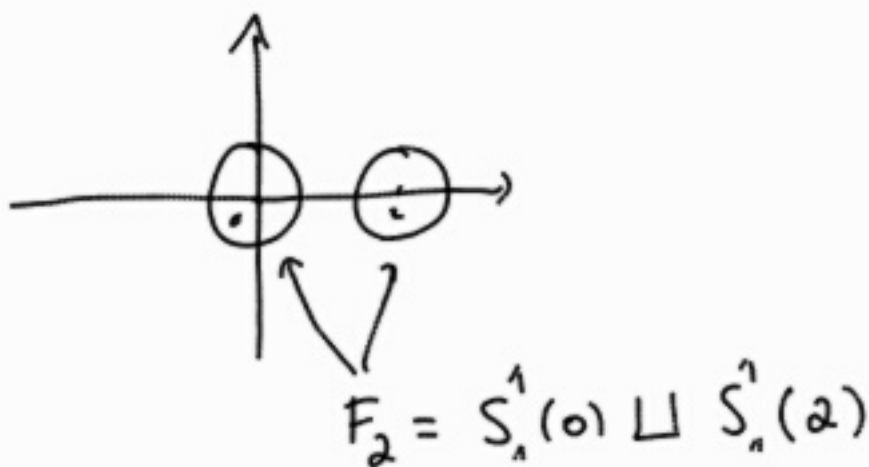
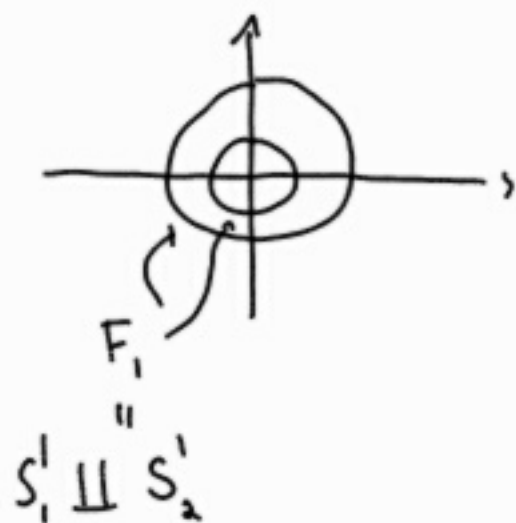
seja $\phi: F_1 \rightarrow F_2$ um homeomorfismo

Pergunta: Qual a relação entre $\mathbb{R}^n - F_1$ & $\mathbb{R}^n - F_2$?

São homeomorfos? São homotopicamente equivalentes?

Não têm relação?

Exemplo: Em \mathbb{R}^2



Note que $F_1 \cong F_2$ mas $\mathbb{R}^2 - F_1 \underset{\text{h.e.}}{\simeq} S^1 \cup S^1 \cup \{pt\}$

$$\mathbb{R}^2 - F_2 \underset{\text{h.e.}}{\simeq} S^1 \vee S^1 \cup \{pt\} \cup \{pt\}$$

Nesse exemplo, $\mathbb{R}^2 - F_1$ NÃO É Homotopicamente equivalente à $\mathbb{R}^2 - F_2$, mas eles tem os mesmos grupos de Homologia (Exercício!)

OBS: O fato de $\mathbb{R}^n - F_1 \not\cong \mathbb{R}^n - F_2$ dá origem à teoria dos nós:

Um nó é um mergulho $f: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Dois nós são equivalentes se existir isotopia entre eles ($F_t: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ homeo $\forall t$, tal que $F_0 = Id$, $f_1 = F_1 \circ f_0$)

• Invariante básico de um nó:

$$\pi_1(\mathbb{R}^3 - \text{Im}(f))$$

Teorema (Dualidade de Jordan-Alexander)

Sejam $F_1, F_2 \subset \mathbb{R}^n$ fechados, e $\phi: F_1 \rightarrow F_2$ um homeomorfismo. Então $H_k(\mathbb{R}^n - F_1) \cong H_k(\mathbb{R}^n - F_2) \forall k$.

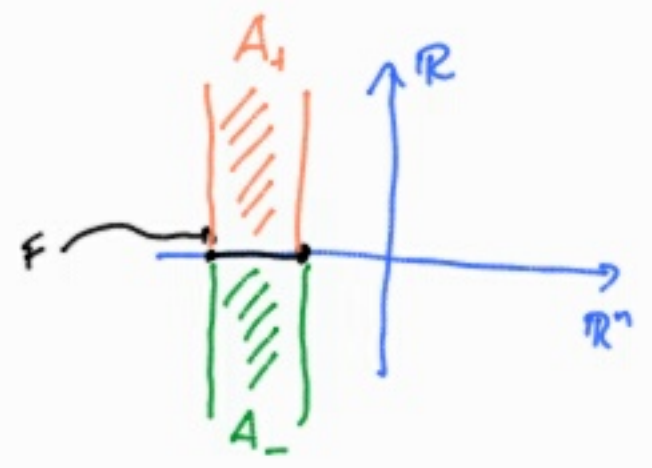
Lema: Se $F \subset \mathbb{R}^n$ é fechado, $F \neq \mathbb{R}^n$, Então

$$\tilde{H}_{i+1}(\mathbb{R}^{n+1} - F) \cong \tilde{H}_i(\mathbb{R}^n - F) \quad \forall i$$

Dem: Considere $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n, 0)\}$

Sejam:

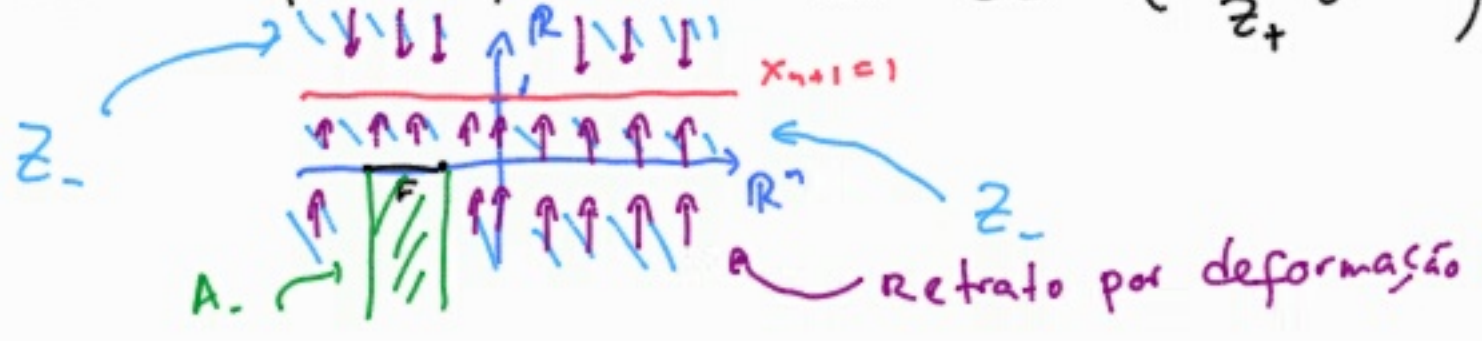
- $Z_+ = \mathbb{R}^{n+1} - \underbrace{(F \times \{t \in \mathbb{R} \mid t \geq 0\})}_{A_+}$
- $Z_- = \mathbb{R}^{n+1} - \underbrace{(F \times \{t \in \mathbb{R} \mid t \leq 0\})}_{A_-}$



Segue que

- $Z = Z_+ \cup Z_- = \mathbb{R}^{n+1} - F$
- $Z_+ \cap Z_- \xrightarrow[\text{h.e.}]{} \mathbb{R}^n - F$ (Pela homotopia linear $H_s(x,t) = (x, (1-s)t)$)

Note que Z_+ e Z_- são contráteis: de fato o plano $x_{n+1} = 1$ é retrato por deformação de Z_+ (Análogo p/ Z_-)



Logo, por Mayer-Vietoris (Note que $\mathbb{R}^{n+1} - F = (\text{Int } Z_+) \cup \text{Int } Z_-$)³
 temos

$$\begin{array}{ccccccc} \tilde{H}_{i+1}(Z_+) \oplus \tilde{H}_{i+1}(Z_-) & \rightarrow & \tilde{H}_{i+1}(\mathbb{R}^{n+1} - F) & \xrightarrow{\cong} & \tilde{H}_i(\mathbb{R}^n - F) & \rightarrow & \tilde{H}_i(Z_+) \oplus \tilde{H}_i(Z_-) \\ & & & & & & \parallel \\ & & & & & & 0 \end{array}$$

OBS: Aplicando sucessivamente o resultado acima, obtemos

$$\tilde{H}_{i+k}(\mathbb{R}^{n+k} - F) \cong \tilde{H}_i(\mathbb{R}^n - F) \quad \forall i$$

Lema: Sejam $F_1, F_2 \subset \mathbb{R}^n$ fechados, $\phi: F_1 \rightarrow F_2$ homeomorfismo.

Então $\mathbb{R}^{2n} - F_1 \cong \mathbb{R}^{2n} - F_2$
 (homeo)

Dem: Seja $\psi = \phi^{-1}: F_2 \rightarrow F_1$. Pelo teorema de Tietze podemos estender ϕ e ψ para aplicações contínuas

$$\tilde{\phi}, \tilde{\psi}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Note que:

$$\begin{array}{l} L: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n} \\ (x, y) \mapsto (x, y + \tilde{\phi}(x)) \end{array} ; \begin{array}{l} R: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n} \\ (x, y) \mapsto (x + \tilde{\psi}(y), y) \end{array}$$

São homeomorfismos. Suas inversas são:

$$L^{-1}(x, y) = (x, y - \tilde{\phi}(x)) ; R^{-1}(x, y) = (x - \tilde{\psi}(y), y)$$

④

Seja

$$\begin{aligned} \Gamma &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^{2n} \mid x \in F_1, y = \phi(x)\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^{2n} \mid y \in F_2, x = \psi(y)\} \end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned} L(F_1 \times \{0\}) &= \{(x, \phi(x)) \mid x \in F_1\} = \Gamma = \{(\psi(y), y) \mid y \in F_2\} \\ &= \mathcal{R}(\{0\} \times F_2) \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{2n} - (F_1 \times \{0\}) & \xrightarrow{L} & \mathbb{R}^{2n} - \Gamma & \xrightarrow{\mathcal{R}^{-1}} & \mathbb{R}^{2n} - (\{0\} \times F_2) \\ & & & & \downarrow (x, y) \mapsto (y, x) \\ & & & & \mathbb{R}^{2n} - (F_2 \times \{0\}) \end{array}$$

\cong
homeomorfismo

Dem do teorema (Dualidade de Jordan-Alexander)

$$H_k(\mathbb{R}^n - F_1) \cong H_{k+n}(\mathbb{R}^{2n} - F_1) \cong H_{k+n}(\mathbb{R}^{2n} - F_2) \cong H_k(\mathbb{R}^n - F_2)$$

Corolário (Teorema da Curva de Jordan)Se $f: S^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ é um mergulho (um homeomorfismo sobre a imagem) $\Rightarrow \mathbb{R}^n - f(S^{n-1})$ tem duas componentes conexas.Dem: $f(S^{n-1}) \subset \mathbb{R}^n$ é fechado & homeomorfo à $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$.

$$\Rightarrow H_0(\mathbb{R}^n - f(S^{n-1})) \cong H_0(\mathbb{R}^n - S^{n-1}) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

Obs: O teorema de dualidade de Jordan-Alexander ⑤
pode ser usado para calcular os grupos de homologia
de alguns espaços complicados, por exemplo

$$X = \mathbb{R}^n - Y \quad \text{onde } Y =$$



A esfera com uma
"trança" por dentro

Projeto: (Valendo 0,5pts na média final)

Existe um mergulho $f: S^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que a componente
externa de $\mathbb{R}^3 - f(S^2)$ não é simplesmente conexo

(conhecido como Alexander Horned Sphere).

- Explique a construção deste mergulho e demonstre suas propriedades.
- Explique (e demonstre) o teorema de Jordan-Schönflies
- Compare os dois resultados acima.