Aula 17

O Teorema de Hurewicz

· <u>Teorema</u> (Hurewicz em Dimensão 1)

Seja X conexo por caminhos. Então

$$H_1(X,\mathbb{Z}) \cong \pi_1(X,x_0)_{ab} := \frac{\pi_1(X,x_0)}{[\pi_1(X,x_0),\pi_1(X,x_0)]}$$

· <u>Um pouco de álgebra</u>:

- Seja G um grupo.
- $[G,G]$ = menor subgrupo normal que contém $\{ghg^{-1}h^{-1} \mid g,h \in G\}$

<u>Def</u>: A <u>abelianização de G</u> é o grupo abeliano

$$\boxed{G_{ab} := G/_{[G,G]}}$$

<u>Lema</u>: (Propriedade Universal)

Se A é um grupo abeliano, e $\phi: G \to A$ é homomorfismo então existe um único homomorfismo $\bar{\phi}: G_{ab} \to A$ tal que

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\pi"'] & A \\ G_{ab} \arrow[ur, "\bar{\phi}"'] & \end{tikzcd}$$

<u>Dem</u>: <u>Unicidade</u>: $\bar{\phi}[g] = \phi(g)$ determine $\bar{\phi}$ unicamente (se existir)

<u>Existência</u>: · Note que $[G,G] \subset \operatorname{Ker}\phi$ pois

(i) $\phi(ghg^{-1}h^{-1}) = \phi(g)+\phi(h)-\phi(g)-\phi(h)=0$; & (ii) $\operatorname{Ker}\phi$ é normal

(iii) $[G,G]$ é o menor subgrupo normal que contém $\{ghg^{-1}h^{-1} \mid g,h \in G\}$.

Logo, a projeção $G \to G/\ker\phi$ fatora por

$$G \xrightarrow{\pi} G/[G,G] \xrightarrow{\overline{\pi}} G/\ker\phi .$$

Pelo teorema do isomorfismo existe $\widetilde{\phi}: G/\ker\phi \to A$ e definimos $\overline{\phi} = \widetilde{\phi} \circ \overline{\pi}$, ou seja

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[rr, "\phi"] \arrow[d] & & A \\
G/[G,G] \arrow[urr, dashed, "\overline{\phi}"] \arrow[d] & & \\
G/\ker\phi \arrow[uurr, "\widetilde{\phi}"'] & &
\end{tikzcd}$$

Estratégia para demonstrar Hurewicz:

(1) Mostrar que existe homomorfismo

$$\phi: \pi_1(X,x_0) \longrightarrow H_1(X,\mathbb{Z})$$

(2) Segue do Lema que ϕ induz $\overline{\phi}: \pi_1(X,x_0)_{ab} \longrightarrow H_1(X,\mathbb{Z})$

(3) Mostrar que $\overline{\phi}$ é isomorfismo.

- <u>Notação</u>: Se $f: \Delta^1 = I \longrightarrow X$
  - $[f]$ = classe de homotopia de f
  - $[\![f]\!]$ = classe de homologia de f
  - $f \simeq g$ = f é homotópico à g
  - $f \sim g$ = f é homólogo à g

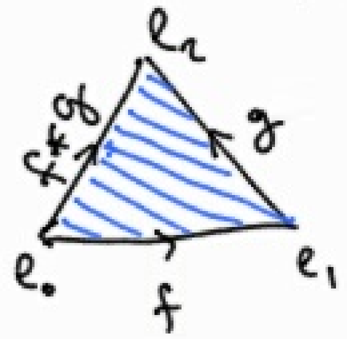
Lema 1: Se $f, g : \Delta^1 \longrightarrow X$, $f(1) = g(0)$, então

$$\boxed{f * g \sim f + g}$$

Dem: Temos que mostrar que existe $c \in C_2(X)$ tal que

$$\partial c = f + g - f * g$$

Seja $\sigma : \Delta^2 \longrightarrow X$ definido por



σ é $\begin{cases} \text{constante nas retas perpendiculares à } [e_0, e_2] \\ \sigma|_{[e_0, e_1]} = f \; ; \; \sigma|_{[e_1, e_2]} = g \end{cases}$

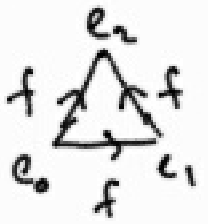
$$\Rightarrow \boxed{\partial \sigma = f + g - f * g}$$

OBS: A partir de agora vou escrever $f + g$ para denotar a concatenação $f * g$ quando estiver trabalhando com homologia.

Lema 2: Se $f : \Delta^1 \longrightarrow X$ é constante $\Rightarrow f \in B_1(X)$ é um bordo

Dem: Suponha $f(t) = x_0 \; \forall t$.

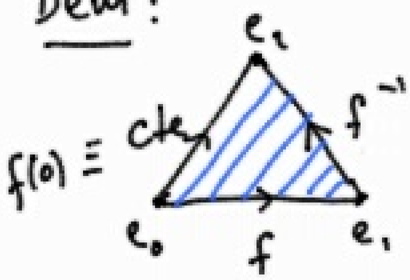
Seja $\sigma : \Delta^2 \to X$, $\sigma \equiv x_0$ constante



$$\Rightarrow \partial \sigma = f + f - f = f$$

<u>Lema 3</u>: Se $f : \Delta^1 \to X \Rightarrow f + f^{-1}$ é bordo
(ou seja $f^{-1} \sim -f$)

<u>Dem</u>:



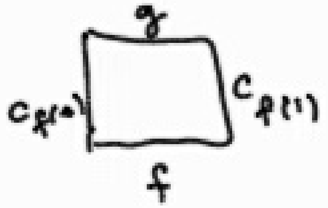
$\xrightarrow{\sigma} X$

$\sigma|_{[e_0,e_1]} = f$; $\sigma|_{[e_1,e_2]} = f^{-1}$; σ é constante nas retas paralelas à $[e_0,e_2]$.

$$\Rightarrow \partial\sigma = f + f^{-1} - \underbrace{\text{cte}}_{\substack{\partial\sigma' \\ \text{(pelo Lema 2)}}} \Rightarrow \partial(\sigma + \sigma') = f + f^{-1}.$$

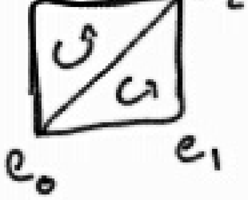
<u>Lema 4</u>: Se $f \simeq g \text{ rel } \partial I \Rightarrow f \sim g$

<u>Dem</u>: Seja



$\xrightarrow{H} X$ a homotopia.

Divida $I \times I$ em duas cópias de Δ^2, ou seja, considere a triangulação



e sejam: $\sigma_1 = H|_{[e_0,e_2,e_3]}$

$\sigma_2 = H|_{[e_0,e_1,e_2]}$

$$\Rightarrow \partial(\sigma_1 + \sigma_2) = h - g + c_{f(0)} + f - c_{f(1)} - h \sim f - g$$

(onde $h = H|_{[e_0,e_2]}$)

OBS: Note que se $f: \Delta^1 \longrightarrow X$ é um laço ($f(0)=f(1)$)
$\Rightarrow \partial f = f(1) - f(0) = 0 \Rightarrow f \in Z_1(X)$.

Segue dos lemas acima, e da observação, que

$$\begin{aligned} \phi: \pi_1(X,x_0) &\longrightarrow H_1(X,\mathbb{Z}) \\ [f] &\longmapsto [\![f]\!] \end{aligned}$$

é um homomorfismo de grupos.

$\Rightarrow \phi$ induz

$$\overline{\phi}: \pi_1(X,x_0)_{ab} \longrightarrow H_1(X,\mathbb{Z})$$

<u>Teorema</u> (Hurewicz) Se X é conexo por caminhos
$\Rightarrow \overline{\phi}$ é isomorfismo

<u>Dem</u>: Vou construir a inversa $\psi: H_1(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow \pi_1(X,x_0)_{ab}$.

Para cada $x \in X$, seja $\gamma_x : I \longrightarrow X$ tal que
$\gamma_x(0) = x_0$, $\gamma_x(1) = x$; E seja $\gamma_{x_0} = c_{x_0}$ (constante)

Seja $f: \Delta^1 \longrightarrow X$ (um caminho). Denote por

$\hat{f} = \gamma_{f(0)} * f * \gamma_{f(1)}^{-1}$ o laço em x_0 que

obtemos por concatenação com $\gamma_{(\cdot)}$.

Defina

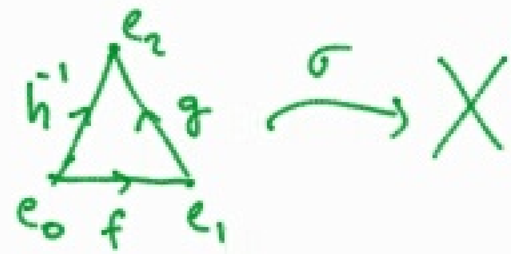
$$\begin{aligned} \psi: C_1(X,\mathbb{Z}) &\longrightarrow \pi_1(X,x_0)_{ab} \\ f &\longmapsto [\hat{f}]_{ab} \end{aligned}$$

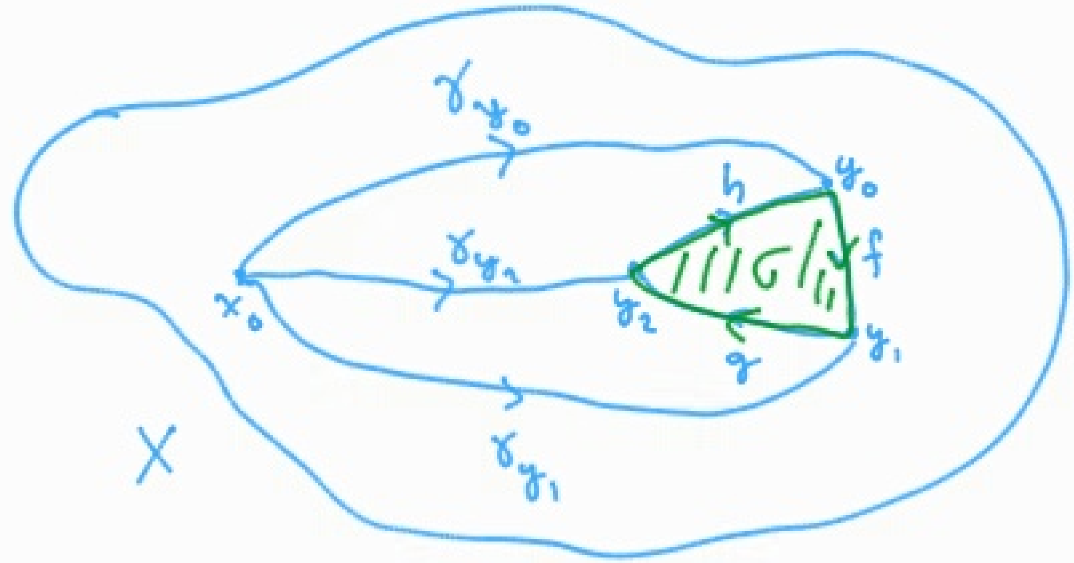
(definido nos geradores)

(onde $[\hat{f}]$ é a classe de homotopia rel ∂I de $\hat{f}$, e $[\hat{f}]_{ab}$ é sua projeção para $\pi_1(X,x_0)_{ab}$)

<u>Afirmação</u>: $\underbrace{B_1(X,\mathbb{Z})}_{\text{bordos}} \subset \ker \psi$ (ou seja, ψ induz $\bar{\psi}: H_1(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow \pi_1(X,x_0)_{ab}$)

<u>De fato</u>: Seja $\sigma: \Delta^2 \longrightarrow X$





$f = \sigma|_{[e_0,e_1]}$, $g = \sigma|_{[e_1,e_2]}$

$h = \sigma|_{[e_2,e_0]}$

Temos que:

$$\psi(\partial\sigma) = \psi(f+g-h^{-1}) = \psi(f)\psi(g)\psi(h^{-1})^{-1} = [\hat{f}]_{ab}[\hat{g}]_{ab}[\hat{h^{-1}}]_{ab}^{-1} =$$

$$= [\hat{f} * \hat{g} * (\hat{h^{-1}})^{-1}]_{ab} = [\gamma_{y_0} * f * \gamma_{y_1}^{-1} * \gamma_{y_1} * g * \gamma_{y_2}^{-1} * (\gamma_{y_0} * h^{-1} * \gamma_{y_2}^{-1})^{-1}]_{ab}$$

$$= [\gamma_{y_0} * f * g * \gamma_{y_2}^{-1} * \gamma_{y_2} * h * \gamma_{y_0}^{-1}]_{ab} = [\gamma_{y_0} * \underbrace{f * g * h}_{} * \gamma_{y_0}^{-1}]_{ab}$$

homotópico à cte pois se estende à $\Delta^2 \cong D^2$

$$= [\gamma_{y_0} * \gamma_{y_0}^{-1}]_{ab} = [1]_{ab} = 0$$

<u>Note que</u>:

se $f: \Delta^1 \longrightarrow X$ é um laço em x_0

$\Rightarrow \bar{\psi} \circ \bar{\phi}[f]_{ab} = \bar{\psi}[\![f]\!] = [\gamma_{x_0} f \gamma_{x_0}^{-1}]_{ab} = [f]_{ab}$

$\Rightarrow \bar{\psi} \circ \bar{\phi} = Id_{\pi_1(X,x_0)_{ab}}$

OBS: A aplicação $x \longmapsto \gamma_x$ leva 0-simplexos singulares em um simplexos singulares. Estende por linearidade para

$$\gamma : C_0(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow C_1(X,\mathbb{Z})$$

$$\gamma(\sum n_i x_i) = \sum n_i \gamma_{x_i}$$

Afirmação: $\bar{\phi} \circ \bar{\psi} = Id_{H_1(X,\mathbb{Z})}$

De fato seja $[\![z]\!] \in H_1(X,\mathbb{Z})$ representada por um ciclo $z = \sum n_i f_i$

$$\Rightarrow \bar{\psi}[\![z]\!] = \sum n_i [\bar{\psi}(f_i)]_{ab} = \sum n_i [\gamma_{f_i(0)} * f_i * \gamma^{-1}_{f_i(1)}]_{ab}$$

$$\Rightarrow \bar{\phi}\bar{\psi}([\![z]\!]) = \sum n_i [\![\gamma_{f_i(0)} * f_i * \gamma^{-1}_{f_i(1)}]\!] = \sum n_i [\![\gamma_{f_i(0)} + f_i - \gamma_{f_i(1)}]\!]$$

$$= \sum n_i [\![f_i - \gamma_{\partial f_i}]\!] = [\![z]\!] - \sum n_i [\![\gamma_{\partial f_i}]\!] = [\![z]\!] - [\![\gamma_{\partial z}]\!] = [\![z]\!]$$

pois $\partial z = 0$. ■

Exercício: Calcule $H_*(X)$ para os seguintes espaços:

1) $X = T_g = \underbrace{T \# \cdots \# T}_{g\text{-vezes}}$; 2) $X = \mathbb{P}_h = \underbrace{\mathbb{P} \# \mathbb{P} \# \cdots \# \mathbb{P}}_{h\text{-vezes}}$

Exercício: Calcule
- $H_1(M_1 \# M_2)$ para $\dim M_1 = \dim M_2 \geq 3$
- $H_1(M - \{x\})$ para $\dim M \geq 3$
- $H_1(\mathbb{R}P^n)$

Exercício: Seja G um grupo abeliano finitamente gerado. Encontre X tal que $H_1(X,\mathbb{Z}) \cong G$.

<u>OBS</u>: O Teorema de Hurewicz no caso geral diz o seguinte:

<u>Teorema</u> (Hurewicz)

Se X é $(n-1)$-conexo $(n \geq 2)$ então

$$h_n : \pi_n(X, x_0) \longrightarrow H_n(X, \mathbb{Z}) \text{ é isomorfismo}$$
$$[\gamma] \longmapsto \gamma_* \underbrace{[\![S^n]\!]}_{\substack{\text{classe fundamental} \\ \text{de } S^n}}$$

(Lembre que
$$\underbrace{\pi_n(X, x_0)}_{\substack{\text{grupo abeliano} \\ \forall n \geq 2}} = \{ \underbrace{[\gamma]}_{\substack{\text{homotopia} \\ \text{relativa à } \{p\}}} \mid \gamma : S^n \to X,\ \gamma(p) = x_0 \}$$
)

<u>Corolário</u>: Se X é simplesmente conexo & $\tilde{H}_i(X) = 0$ $\forall i < n$

$$\Rightarrow \pi_i(X, x_0) = 0 \quad \forall i < n \quad \& \quad \pi_n(X, x_0) \cong H_n(X, \mathbb{Z}).$$