Aula 16

(Homologia Simplicial v.s. Singular / O teo. do pto fixo de Lefschetz)

Parte I: Homologia Simplicial vs. Singular.

Seja
- K complexo simplicial (ou Δ-cplxo)
- $|K|$ sua realização geométrica.

Objetivo: Mostrar que $H_n^{simp}(K) \cong H_n^{sing}(|K|)$ $\forall n$

OBS: A mesma demonstração vale para Δ-cplxos.

$\Rightarrow$ obtemos $H_n^{\Delta}(K) \cong H_n^{simp}(K)$ como corolário.

- Seja $(v_0, \dots, v_p)$ um p-simplexo de K.

$\Rightarrow (v_0, \dots, v_p)$ determina $\sigma : \Delta^p \longrightarrow |K|$ (aplicação "linear" $(e_0, \dots, e_p) \mapsto (v_0, \dots, v_p)$)

- Obtemos assim

$$\Psi : C_p^{simp}(K) \longrightarrow C_p^{sing}(|K|)$$
$$(v_0, \dots, v_p) \longmapsto \sigma$$

Teorema: A aplicação Ψ acima induz isomorfismo

$$\Psi_* : H_n^{simp}(K) \longrightarrow H_n^{sing}(|K|) \quad \forall n.$$

- Ideia da dem: Seja $K^{(p)}$ o p-esqueleto de K.

vou mostra por indução que $H_n^{simp}(K^{(p)}) \cong H_n^{sing}(|K^{(p)}|)$

Se K é finito $\Rightarrow$ acabou pois $K = K^{(p)}$ para algum p. Se K é ∞, usar argumento de compacidade.

Para mostrar que $H_n^{simp}(K^{(p)}) \cong H_n^{sing}(|K^{(p)}|)$

vou usar o lema do 5

$$\begin{tikzcd}
H^{\Delta}_{n+1}(K^p, K^{p-1}) \arrow[r] \arrow[d, "①"] & H_n(K^{p-1}) \arrow[r] \arrow[d, "②"'] & H_n(K^p) \arrow[r] \arrow[d, "?"] & H_n(K^p, K^{p-1}) \arrow[r] \arrow[d, "④"'] & H_{n-1}(K^{p-1}) \arrow[d, "⑤"'] \\
H^{sing}_{n+1}(|K^p|, |K^{p-1}|) \arrow[r] & H_n(|K^{p-1}|) \arrow[r] & H_n(|K^p|) \arrow[r] & H_n(|K^p|, |K^{p-1}|) \arrow[r] & H_{n-1}(|K^{p-1}|)
\end{tikzcd}$$

① & ④ $\cong$: Vai seguir de uma conta

② & ⑤ $\cong$; Por indução em p.

<u>Lema</u>: $H_n^{sing}(\Delta^n, \partial\Delta^n) \cong \mathbb{Z}$, gerado por $Id = i_n : \Delta^n \to \Delta^n$

<u>OBS</u>: o resultado correspondente $H_n^{simp}(\Delta^n, \partial\Delta^n) \cong \mathbb{Z}$ gerado por $(e_0, \dots, e_n) = [\Delta^n]$ já foi demonstrado usando o fato que $(\Delta^n, \partial\Delta^n)$ é pseudo-variedade orientada com bordo, e $[\Delta^n]$ é a classe fundamental.

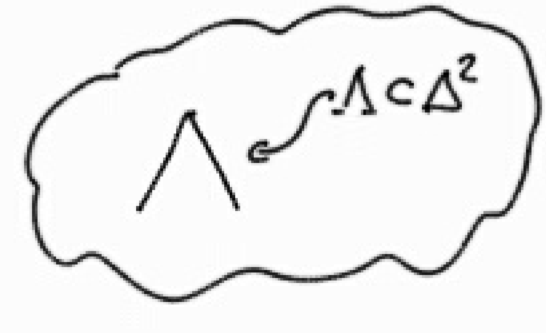
<u>Dem</u>: <u>Por indução em n:</u>

- Para $n = 0$: $\Delta^0 = \{pt\}$, $\partial\Delta^0 = \phi$

  $H_0(\{pt\}) \cong \mathbb{Z} = \langle \sigma = cte \rangle$.

- Suponha que $H_{n-1}(\Delta^{n-1}, \partial\Delta^{n-1})$ é gerado por $i_{n-1} : \Delta^{n-1} \to \Delta^{n-1}$

Seja $\Lambda = \partial\Delta^n - [e_0, \dots, e_{n-1}] \subset \Delta^n$.

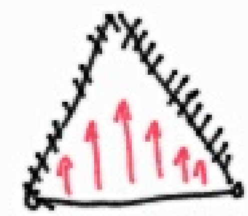


Temos a sequencia longa exata da tripla $(\Delta^n, \partial\Delta^n, \Lambda)$
(Exercício da lista)

$$H_n(\Delta^n, \Lambda) \to H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(\partial\Delta^n, \Lambda) \to H_{n-1}(\Delta^n, \Lambda)$$

Mas

Λ é retrato por deformasão de Δ^n



$\Rightarrow \ H_n(\Delta^n, \Lambda) \cong H_n(\Lambda, \Lambda) = 0$

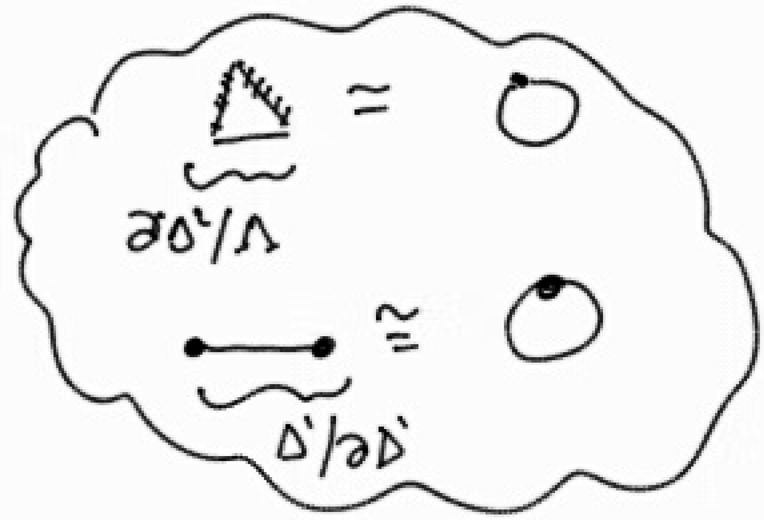
$\Rightarrow \ \partial_*$ é $\cong$. Note que $\partial_*[i_n] = [\partial i_n] = [\Sigma(-1)^p\, i^p_{n-1}]$
onde i^p_{n-1} é a identificasão canônica de Δ^{n-1} com a p-ésima face $[e_0, \ldots, \hat{e}_p, \ldots, e_n]$ de Δ^n.

Por outro lado:

A inclusão $\Delta^{n-1} \longrightarrow \partial\Delta^n$ induz um homeo

$[e_0, \ldots, e_{n-1}] \mapsto [e_0, \ldots, e_{n-1}]$

$$\Delta^{n-1}/\partial\Delta^{n-1} \underset{\text{(Exercício)}}{\cong} \partial\Delta^n/\Lambda$$



Logo,

$$H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n) \underset{\cong}{\xrightarrow{\partial_*}} H_{n-1}(\partial\Delta^n, \Lambda) \xrightarrow{\cong} H_{n-1}(\Delta^{n-1}, \partial\Delta^{n-1})$$

$$[i_n] \longmapsto [\Sigma \pm i^p_{n-1}] \longrightarrow [\pm i_{n-1}]$$

$\Rightarrow [i_n]$ gera $H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n) \cong \mathbb{Z}$. ∎

Dem. do Teorema:

Vamos calcular $H_n(|K^p|, |K^{p-1}|)$.

Note que podemos identificar

$$|K^p| = \coprod_\alpha \Delta^p_\alpha / \sim$$

(onde a relação $\sim$ vem de $|K^{p-1}|$)

Logo, temos

$$\Psi : \coprod_\alpha \underbrace{(\Delta^p_\alpha, \partial\Delta^p_\alpha)}_{\text{bom par}} \longrightarrow \underbrace{(|K^p|, |K^{p-1}|)}_{\text{bom par}}$$

que induz homeomorfismo

$$\left(\coprod_\alpha \Delta^p_\alpha \Big/ \coprod_\alpha \partial\Delta^p_\alpha \right) \longrightarrow |K^p| \big/ |K^{p-1}|$$

$$\Rightarrow H_n(|K^p|, |K^{p-1}|) \cong H_n\left(\coprod_\alpha \Delta^p_\alpha, \coprod \partial\Delta^p_\alpha\right) = \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq p \\ \text{livre gerado por } i_n^\alpha & \text{se } n = p \end{cases}$$

$$\cong H_n^{simp}(K^p, K^{p-1})$$

Exercício da lista!

Obtemos o $\cong$ ① & ④ da página 1. Se K é finito acabou!

- Se K não é finito:

Seja $\Psi_*: H_n^{simp}(K) \longrightarrow H_n(|K|)$

(i) Ψ_* é sobrejetor:

Seja $z \in C_n^{sing}(|K|)$ um ciclo. $z = \sum n_i \sigma_i$. Como $\sigma_i : \Delta^n \to |K|$ tem imagem compacta $\Rightarrow Im(z) := \bigcup Im(\sigma_i) \subset |K^\ell|$ para algum ℓ. $\Rightarrow z \in C_n(|K^\ell|)$ é ciclo $\Rightarrow z = \Psi(z_\ell)$, $z_\ell \in Z_n^\Delta(K^\ell) \subset Z_n^\Delta(K)$

ii) Ψ_* é injetor:

Suponha que $\Psi_*[c]=0 \Rightarrow \Psi c = \partial b$ em $C_n^{sing}(|K|)$.
mas $\mathrm{Im}(b) \subset |K^\ell|$ para algum $\ell \Rightarrow \Psi_*[c]=0$ em $C_n(|K^\ell|)$
$\Rightarrow [c]=0$ em $H_n^{simp}(K^\ell) \Rightarrow [c]=0$ em $H_n^{simp}(K)$ ∎

Corolário/Exercício:

- $H_n^{simp}(K,L) \cong H_n(|K|,|L|)$
- $H_n^{simp}(K)$ só depende do tipo de homotopia de $|K|$
- Se $f,g:|K| \to |L|$, $f \sim g \Rightarrow f_* = g_* : H_n^{simp}(K) \to H_n^{simp}(L)$.

Parte II: Teorema do Pto fixo de Lefschetz

Lembre do teorema da aproximação simplicial:

Teorema: Se K, L são cplxos simpliciais, com K finito, e $f:|K| \to |L|$ contínua, então existe $r \geq 0$ e aproximação simplicial

$$g: Sd^r K \to L.$$

- Segue que: $g \sim f : |K| \to |L|$
- Podemos tomar g tão próximo de f quanto se queira:

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists r \geq 0$, $s \geq 0$ & $g: Sd^r(K) \to Sd^s(L)$ aproximação simplicial de f tal que

$$d(f(x), g(x)) < \varepsilon \quad \forall x \in |K|.$$

- Seja $\mathbb{E}$ um esp. vetorial sobre $\mathbb{K}$, $\dim \mathbb{E} = n$
- Seja $\phi : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$ linear

$$\Rightarrow tr(\phi) = tr \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{\text{Em uma base}} = \underbrace{a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}}_{\text{Não depende da base.}} \in \mathbb{K}$$

<u>Lema</u>: Se

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathbb{E}_1 \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\phi_1"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbb{E}_2 \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\phi_2"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbb{E}_3 \arrow[r] \arrow[d, "\phi_3"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathbb{E}_1 \arrow[r, "i"'] & \mathbb{E}_2 \arrow[r, "\pi"'] & \mathbb{E}_3 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \quad \text{(exato)}$$

$$\Rightarrow tr(\phi_2) = tr(\phi_1) + tr(\phi_3)$$

<u>Dem</u>: Fixa base
- $(f_1, \dots, f_\ell)$ de $\mathbb{E}_3$
- $(e_1, \dots, e_k)$ de $\mathbb{E}_1$

e identifica $\mathbb{E}_2 \cong \mathbb{E}_1 \oplus \mathbb{E}_3$

$\Rightarrow (e_1, \dots, e_k, f_1, \dots, f_\ell)$ é base de $\mathbb{E}_2$

Mas:

$$\left.\begin{aligned} &\cdot\ i \circ \phi_1 = \phi_2 \circ i \\ &\cdot\ \pi \circ \phi_2 = \phi_3 \circ \pi \end{aligned}\right\} \Rightarrow \phi_2 = \begin{pmatrix} (\phi_1) & * \\ * & (\phi_3) \end{pmatrix} \Rightarrow tr\,\phi_2 = tr\,\phi_1 + tr\,\phi_3$$

$\blacksquare$

- Seja $\mathcal{C} = (C_\cdot, \partial_\cdot)$ complexo de espaços vetoriais $/\mathbb{K}$ tal que $\dim C_i < \infty \quad \forall i$
- Seja $\phi : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ aplicação de cadeia tal que

$$\phi_p : C_p \to C_p \quad , \quad \phi_p \equiv 0 \quad \forall p > n$$

<u>Def</u>: O <u>número de Lefschetz</u> de ϕ é

$$\lambda(\phi) = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \operatorname{tr}(\phi_p)$$

<u>OBS</u>: Note que λ generaliza o número de Euler:

$$\begin{pmatrix} \text{quando } C_p = 0 \\ \forall p > n \end{pmatrix} \qquad \lambda(Id_{\mathcal{C}}) = \chi(\mathcal{C}) = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \dim_{\mathbb{K}} C_p$$

<u>Teorema</u>: $\lambda(\phi) = \lambda(\phi_*) := \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \operatorname{tr} \phi_{*,p} \qquad \begin{pmatrix} \text{onde} \\ \phi_{*,p} : H_p(\mathcal{C}_\cdot) \to H_p(\mathcal{C}_\cdot) \end{pmatrix}$

<u>Dem</u>: Considere as sequencias exatas

$$0 \to B_p \xrightarrow{i} Z_p \xrightarrow{\pi} H_p \to 0$$

$$0 \to Z_p \xrightarrow{i} C_p \xrightarrow{\partial} B_{p-1} \to 0$$

- Pelo Lema $\Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tr} \phi|_{Z_p} &= \operatorname{tr} \phi|_{B_p} + \operatorname{tr} \phi_{*,p} \\ \operatorname{tr} \phi_p &= \operatorname{tr} \phi|_{Z_p} + \operatorname{tr} \phi|_{B_{p-1}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \operatorname{tr}\phi_p = \operatorname{tr}\phi_{*,p} + \operatorname{tr}\phi|_{B_p} + \operatorname{tr}\phi|_{B_{p-1}}$$

$$\Rightarrow \lambda(\phi) = \operatorname{tr}\phi_0 - \operatorname{tr}\phi_1 + \operatorname{tr}\phi_2 - \cdots \pm \operatorname{tr}\phi_n$$

$$= \operatorname{tr}\phi_{0,*} + \cancel{\operatorname{tr}\phi_{B_0}} - \operatorname{tr}\phi_{1,*} - \cancel{\operatorname{tr}\phi_{B_1}} - \cancel{\operatorname{tr}\phi_{B_0}} + \operatorname{tr}\phi_{*,2} + \cancel{\operatorname{tr}\phi_{B_2}} + \cancel{\operatorname{tr}\phi_{B_1}} - \cancel{\cdots}$$

$$\pm \left(\operatorname{tr}\phi_{*,n} + \operatorname{tr}\phi_{B_n} + \operatorname{tr}\phi_{B_{n-1}} \right)$$

$$= \sum (-1)^p \operatorname{tr}\phi_{*,p} \pm \cancel{\operatorname{tr}\phi}|_{B_n} \qquad \left(\phi_{n+1} = 0 \Rightarrow \phi|_{B_n} = \phi_n \circ \partial = \partial \circ \phi_{n+1} = 0 \right)$$

■

Def: Seja K complexo simplicial finito, e $f : |K| \to |K|$ contínua. O número de Lefschetz de f é

$$\lambda(f) = \lambda(g_*) \quad \text{onde } g \text{ é aproximação simplicial de } f.$$

Teorema (Pto fixo de Lefschetz): (K & f como acima)

Se $\lambda(f) \neq 0 \Rightarrow f$ tem ponto fixo.

Dem: Suponha que f não tem ponto fixo.

- $|K|$ é espaço métrico compacto $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0$ t.q. $d(x, f(x)) > \varepsilon$
- $\exists\, g : Sd^r K \to Sd^r K$ aproximação simplicial tal que

$$d(g(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$$

- Podemos assumir que $\operatorname{diam} \sigma < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall \sigma \in Sd^r(K)$.

Logo, $g(\sigma) \cap \sigma = \phi \quad \forall \sigma$

$$\Rightarrow \quad g_p : C_p(Sd^r K) \to C_p(Sd^r K)$$

$$g_p = \begin{pmatrix} 0 & \ddots & * \\ * & & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{tr} g_p = 0 \ \forall p \Rightarrow \lambda(g) = \lambda(f) = 0.$$

Consequencias:

Corolário: Se $|K|$ é compacto & Contrátil

$\Rightarrow \forall f : |K| \to |K|$, f tem ponto fixo.

Generaliza o teorema do pto fixo de Brouwer

Dem: $H_p(K) = \begin{cases} 0 & \text{se } p \neq 0 \\ \mathbb{K} & \text{se } p = 0 \end{cases}$, $\quad f_{*,0} : \underset{\mathbb{K}}{\underset{\parallel}{H_0(K)}} \xrightarrow{\cong} \underset{\mathbb{K}}{\underset{\parallel}{H_0(K)}}$

$$\Longrightarrow \lambda(f) = \operatorname{tr} f_{*,0} \neq 0 \Rightarrow f \text{ tem ponto fixo}$$

Corolário: Seja M variedade fechada de $\dim M = n$.
Se $\xi \in \mathcal{X}(M)$ não se anula $(\xi(x) \neq 0 \ \forall x \in M)$
$\Rightarrow \chi(M) = 0$

Dem: Suponha $\xi(x) \neq 0 \ \forall x \in M$. Seja $\varphi_\xi^t(x)$ o fluxo em tempo t do campo ξ à partir de x:
i.e., a solução da EDO

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \varphi_\xi^t(x) = \xi(\varphi_\xi^t(x)) \\ \varphi_\xi^0(x) = x. \end{cases}$$

• Seja $m = \min \underbrace{\{T > 0 \mid \varphi_\xi^T(x) = x\}}_{*}$ $\quad (m = \infty$ se $\circledast = \phi)$

$\Rightarrow m > 0$ & $\forall t < m$ temos que $\varphi_\xi^t : M \to M$ não tem ponto fixo $\Rightarrow \lambda(\varphi_\xi^t) = 0$

Mas $\varphi_\xi^t \sim Id_M$ pela homotopia $H : M \times I \to M$
$$H(x, s) = \varphi_\xi^{st}(x)$$

$\Rightarrow \lambda(Id_M) = \chi(M) = 0$

Corolário (Teorema da Bola Cabeluda)
S^{2n} não admite $\xi \in \mathcal{X}(S^{2n})$, $\xi(x) \neq 0 \ \forall x \in S^{2n}$

Dem: Sabemos que $H_p(S^{2n}, \mathbb{R}) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } p = 0 \text{ ou } 2n \\ 0 & \text{se } p \neq 0, 2n \end{cases}$

$\Rightarrow \chi(S^{2n}) = 1 + 1 = 2 \neq 0$ ∎

OBS: S^{2n-1} admite campo ξ que não se anula:

$$\xi(x_1, \ldots, x_{2n}) = (-x_2, x_1, -x_4, x_3, \ldots, -x_{2n}, x_{2n-1})$$

$(S^{2n-1} \subseteq \mathbb{R}^{2n})$