# Aula 15

## Homologia singular II

Lembre que:

$$C_p(X,R) = \{ \underbrace{\sum r_\sigma \sigma}_{\text{soma finita}} \mid r_\sigma \in R, \ \sigma : \Delta^p \to X \}$$

$$\partial : C_p(X,R) \longrightarrow C_{p-1}(X,R)$$
$$\partial \sigma = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \sigma \circ F_i$$

(onde $F_i : \Delta^{p-1} \to \Delta^p$ é a inclusão como face oposta ao $i$-ésimo vértice)

Se $(X,A)$ é um par de espaços topológicos

$\Rightarrow H_p(X,A)$ é a homologia do complexo $C_p(X,A) = \dfrac{C_p(X)}{C_p(A)}$.

---

**Teorema** (Excisão) (Axioma)

(a) Se $Z \subset A \subset X$ é tal que $\underbrace{\overline{Z}}_{\text{fecho de } Z} \subset \operatorname{int}(A)$

$\Rightarrow (X-Z, A-Z) \hookrightarrow (X,A)$ induz um isomorfismo $H_n(X-Z, A-Z) \cong H_n(X,A)$ $\forall n$.

(b) Se $A, B \subset X$, $X = \operatorname{int}(A) \cup \operatorname{int}(B)$

$\Rightarrow (B, A\cap B) \hookrightarrow (X,A)$ induz isomorfismo

$$H_n(B, A\cap B) \cong H_n(X,A) \ \forall n$$

<u>OBS:</u> (a) $\Leftrightarrow$ (b):

- Dado $Z \subset A \subset X$ com $\overline{Z} \subset \text{int}(A)$, tome $B = X - Z$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{int}(A) \cup \text{int}(B) = X \\ A \cap B = A - Z \end{cases}$$

- Dado $A, B$ tome $Z = X - B \subset A$ (pois $\text{int}(A) \cup \text{int}(B) = X$)

- <u>Ideia da Excisão</u>: "Homologia é uma soma de efeitos locais". (Muito diferente de homotopia)

- <u>Formalizando esta ideia:</u>

Seja $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ t.q. $X = \bigcup_\alpha \text{int}(U_\alpha)$

<u>Def</u>: $\sigma : \Delta^p \to X$ é <u>$\mathcal{U}$-pequeno</u> se $\text{Im}\, \sigma \subseteq U_\alpha$ para algum $\alpha$

- $C_p^{\mathcal{U}}(X) = \{ \underbrace{\sum r_\sigma \sigma}_{\text{finito}} \mid r_\sigma \in R,\ \sigma \text{ é } \mathcal{U}\text{-pequeno} \}$

Segue que $\partial : C_p^{\mathcal{U}}(X) \longrightarrow C_{p-1}^{\mathcal{U}}(X)$ & $i : C_p^{\mathcal{U}}(X) \to C_p(X)$ é chain map.

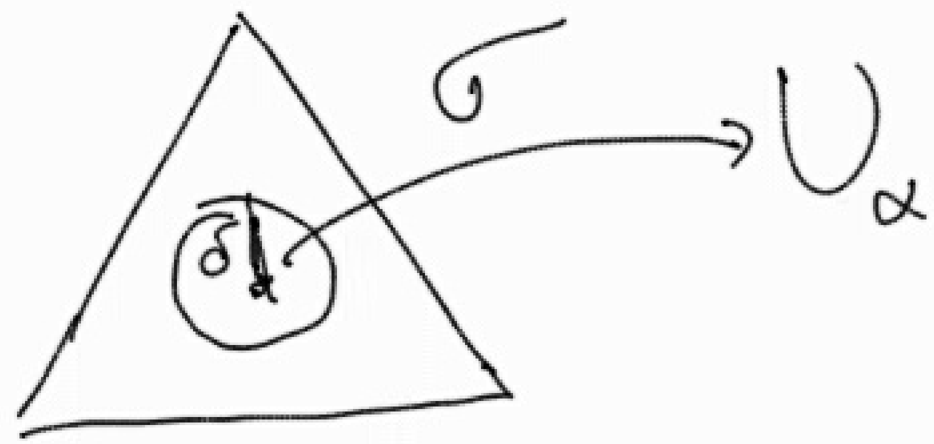
- $H_p^{\mathcal{U}}(X, R)$ = homologia deste complexo.

<u>Prop</u>: Existe $\rho : C_p(X) \longrightarrow C_p^{\mathcal{U}}(X)$ tal que $i \circ \rho$ & $\rho \circ i$ são algebricamente homotópicos à Id.
Em particular, $H_p(X) \cong H_p^{\mathcal{U}}(X)$ $\forall p$.

<u>Esboço</u>: (ver dem. completa no Hatcher)

- $\sigma : \Delta^p \to X$ é contínua
- $\Delta^p$ esp. métrico completo

$\Big\}$ $\exists\, \delta > 0$ número de Lebesgue da cobertura $\{\sigma^{-1}(\text{int}\, U_\alpha)\}$




Podemos então subdividir $\Delta^p$ de forma que $\operatorname{diam}(\Delta_i) < \delta$ $\forall\ \Delta_i$, p-simplexo de $Sd^{(r)} \Delta^p$


Identificando $\Delta_i$ com $\Delta^p$, e denotando $\sigma|_{\Delta_i} = \sigma_i$,

definimos

$$\rho : C_p(X) \longrightarrow C_p^{\mathcal{U}}(X)$$
$$\sigma \longmapsto \sum \sigma_i$$

Segue que $\rho \circ i = Id_{C_p^{\mathcal{U}}(X)}$ ; $\underbrace{i \circ \rho \sim Id_{C_p(X)}}$

homotopia algébrica demonstrado em Hatcher p. 119, prop. 2.21 ∎

<u>Demonstração de Excisão (parte (b))</u>

Tome $\mathcal{U} = \{A, B\} \Rightarrow H_n(X) \cong H_n^{\mathcal{U}}(X)$

Temos:

$$C_n^{\mathcal{U}}(X) = C_n(A+B) = \{ c_A + c_B \mid c_A \in C_n(A),\ c_B \in C_n(B) \}$$

o quasi-isomorfismo $C_n(A+B) \hookrightarrow C_n(X)$ induz um quasi-isom.

$$\frac{C_n(A+B)}{C_n(A)} \longrightarrow \frac{C_n(X)}{C_n(A)}. \quad \text{Mas} \quad \frac{C_n(A+B)}{C_n(A)} \cong \frac{C_n(B)}{C_n(A\cap B)}$$ ∎

## Sequencia de Mayer-Vietoris

Sejam $A, B \subset X$ t.q. $X = \text{int}(A) \cup \text{int}(B)$. Então a sequencia curta exata

$$0 \to C_n(A\cap B) \xrightarrow{i} C_n(A) \oplus C_n(B) \xrightarrow{s} C_n(A+B) \to 0$$
$$\sigma \longmapsto (\sigma, -\sigma)$$
$$(\sigma, \tau) \longmapsto \sigma + \tau$$

induz uma sequência longa exata

$$\cdots \to H_n(A\cap B) \xrightarrow{i_*} H_n(A) \oplus H_n(B) \xrightarrow{s_*} H_n(X) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(A\cap B) \xrightarrow{i_*} \cdots$$

OBS: o mesmo vale para homologia reduzida.

Exemplo: Homologia de $S^n$:

Sejam $A$ = Hemisfério norte (um pouco maior) $\cong D^n$
$B$ = Hemisfério sul (um pouco maior) $\cong D^n$

$\Rightarrow A \cap B \underset{h.e.}{\simeq} S^{n-1}$

$$\Rightarrow \underbrace{\tilde{H}_k(A) \oplus \tilde{H}_k(B)}_{\overset{\shortparallel}{0}} \to \tilde{H}_k(S^n) \to \underbrace{\tilde{H}_{k-1}(S^{n-1})}_{\tilde{H}_{k-1}(A\cap B)} \to \underbrace{\tilde{H}_{k-1}(A) \oplus \tilde{H}_{k-1}(B)}_{\overset{\shortparallel}{0}}$$

$$\Rightarrow \tilde{H}_k(S^n) \cong \tilde{H}_{k-1}(S^{n-1}) \cong \tilde{H}_{k-2}(S^{n-2}) \cong \cdots \cong \tilde{H}_{k-n}(S^0)$$

mas $S^0 = \{-1, 1\} = \{-1\} \sqcup \{1\}$

$$\Rightarrow \tilde{H}_k(S^n) = \begin{cases} R & \text{se } k = n \\ 0 & \text{se } k \neq n \end{cases}$$

(Para ser bem rigoroso é preciso separar $k \geq n$ & $k < n \rightsquigarrow \tilde{H}_k(S^n) = \tilde{H}_0(\underbrace{S^{n-k}}_{\text{conexo}}) = 0$)

- **Bom Par**:

Pergunta: Qual a relasão entre $H_n(X,A)$ e $H_n(X/A)$?

Def: $(X,A)$ é um bom par se existir vizinhansa aberta $A \subset U \subset X$ tal que $A$ é retrato por deformasão de $U$.

Exemplos:

- Se $N \subset M$ é subvariedade mergulhada $\Rightarrow (M,N)$ é bom par (isso segue do teorema da vizinhansa tubular)
- Se $\mathcal{L} \subset K$ é subcomplexo $\Rightarrow (|K|, |\mathcal{L}|)$ é bom par (Toma $U \subset |K|$, $U = \bigcup_{v \in \mathcal{L}} st_K(v)$)
- Em particular, se $(K, \partial K)$ é pseudo-variedade com bordo $\partial K \neq \emptyset \Rightarrow (|K|, |\partial K|)$ é bom par
- O mesmo p/ $\mathcal{L} \subset K$ sub-pseudo variedade: $(|K|, |\mathcal{L}|)$ é bom par

Teorema: Se $(X,A)$ é um bom par $\Rightarrow H_n(X,A) \cong \tilde{H}_n(X/A)$ $\forall n$

Dem:

Note que:

1) $A/A = \{pt\}$ é retrato por deformasão de $U/A$ $\left(\begin{array}{l}\text{retrasão} \\ r(\bar{u}) = \overline{r(u)}\end{array}\right)$

2) $\pi : (X-A, U-A) \longrightarrow (X/A - A/A, U/A - A/A)$ é homeomorfismo $\Rightarrow \pi_*$ é $\cong$.

Logo

Excisão versão (a)

$$\begin{array}{ccccc}
H_n(X,A) & \xrightarrow[\text{(ultima aula)}]{\cong} & H_n(X,U) & \xleftarrow{\cong} & H_n(X-A, U-A) \\
\downarrow j_* & \circlearrowleft & \downarrow & \circlearrowleft & \pi_* \downarrow \cong \text{(2)} \\
H_n(X/A, A/A) & \xrightarrow[\text{(1)+ ultima aula}]{\cong} & H_n(X/A, U/A) & \xleftarrow[\text{excisão}]{\cong} & H_n(X/A - A/A, U/A - A/A)
\end{array} \Rightarrow j_* \text{ é } \cong$$

queremos calcular

∎

<u>OBS</u>: Não é verdade em geral que $H_n(X,A) \cong \widetilde{H}_n(X/A)$.
Mas podemos trocar $X/A$ por um "quociente homotópico".
Ao invés de colapsar $A$ para um ponto $A/A = pt$, considere
$Con(A) = \dfrac{A \times I}{A \times \{0\}} \underset{h.e.}{\simeq} \{pt\}$. Isto sugere trocar $X/A$ por

$X \cup Con(A) =$ 

.

<u>Exercício</u>: Mostre que
$$H_n(X,A) \cong \widetilde{H}_n(X \cup Con(A))$$

## <u>Exemplo</u>: Homologia de $\mathbb{C}P^n$

$$\mathbb{C}P^n = \left(\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}\right) / \sim$$
onde $[z_0, \dots, z_n] = [z_0', \dots, z_n']$
$\iff \exists \lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$ t.q. $z_i' = \lambda z_i$

Note que $\mathbb{C}P^{n-1} \subset \mathbb{C}P^n$ é uma subvariedade:
$$\mathbb{C}P^{n-1} \cong \{[z_0, \dots, z_n] \in \mathbb{C}P^n \mid z_n = 0\}$$
$\Rightarrow (\mathbb{C}P^n, \mathbb{C}P^{n-1})$ é um bom par.

Vamos analisar $\dfrac{\mathbb{C}P^n}{\mathbb{C}P^{n-1}}$:

- $\mathbb{C}P^1 \cong S^2$: Considere $\Psi: \mathbb{C}P^1 \longrightarrow \underbrace{\mathbb{C} \cup \{\infty\}}_{\text{compactificação de um ponto}} \cong S^2$
$$[z_0, z_1] \longmapsto z_0/z_1$$

Exercício: Mostre que $\Psi$ é um homeomorfismo.

- Em geral, temos $\Psi: \mathbb{C}P^n \longrightarrow \mathbb{C}^n \cup \{\infty\} \cong S^{2n}$
$$[z_0, \dots, z_n] \longmapsto \left(\frac{z_0}{z_n}, \dots, \frac{z_{n-1}}{z_n}\right).$$

Note que $\Psi$ é sobrejetor & contínua. Além disso
$$\psi^{-1}(\infty) = \mathbb{C}P^{n-1} \subset \mathbb{C}P^n$$

Exercício: Mostre que $\Psi$ induz um homeomorfismo
$$\tilde{\Psi} : \frac{\mathbb{C}P^n}{\mathbb{C}P^{n-1}} \xrightarrow{\ \simeq\ } S^{2n}$$
(isso é análogo ao teorema do isomorfismo)

Pela sequencia longa do par temos

$$\cdots \to \underbrace{H_k(\mathbb{C}P^n, \mathbb{C}P^{n-1})}_{\tilde{H}_k(S^{2n})} \to H_{k-1}(\mathbb{C}P^{n-1}) \to H_{k-1}(\mathbb{C}P^n) \to \underbrace{H_{k-1}(\mathbb{C}P^n, \mathbb{C}P^{n-1})}_{\tilde{H}_{k-1}(S^{2n})} \to \cdots$$

Logo, se $k \neq 2n$, $k \neq 2n+1 \Rightarrow H_{k-1}(\mathbb{C}P^n) \cong H_{k-1}(\mathbb{C}P^{n-1})$

Se $k = 2n+1$:

$$\cdots \to \underbrace{H_{2n}(\mathbb{C}P^{n-1})}_{\substack{\shortparallel \\ 0}} \to H_{2n}(\mathbb{C}P^n) \xrightarrow{\simeq} \tilde{H}_{2n}(S^{2n}) \to \underset{\substack{\shortparallel \\ 0}}{H_{2n-1}(\mathbb{C}P^{n-1})} \to \cdots$$

pois $\dim \mathbb{C}P^{n-1} = 2n-2$

$\Rightarrow H_{2n}(\mathbb{C}P^n) = R$

Se $k = 2n$:

$$\cdots \to \tilde{H}_{2n}(S^{2n}) \to \underset{\substack{\shortparallel \\ 0}}{H_{2n-1}(\mathbb{C}P^{n-1})} \to H_{2n-1}(\mathbb{C}P^n) \to \underset{\substack{\shortparallel \\ 0}}{\tilde{H}_{2n-1}(S^{2n})} \to \cdots$$

$\Rightarrow H_{2n-1}(\mathbb{C}P^n) = 0$

Juntando tudo temos:

$$H_k(\mathbb{C}P^n, R) \cong \begin{cases} R & \text{se } k \leq 2n \text{ é par} \\ 0 & \text{se } k \text{ é impar ou } k > 2n \end{cases}$$

Teorema (Invariância de Domínio)

Se $U \subset \mathbb{R}^m$, $V \subset \mathbb{R}^n$ são abertos homeomorfos $\Rightarrow m = n$

OBS: • O Teorema $\Rightarrow$ a dimensão de uma variedade topológica está bem definido.

• Se trocar homeo por difeomorfismo, o resultado é óbvio e segue do teorema da função inversa.

Dem: Seja $x \in U$.

$\Rightarrow H_k(U, U - \{x\}) \cong H_k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m - \{x\})$ por excisão

(tomando $B = U$, $A = \mathbb{R}^m - \{x\} \subseteq \mathbb{R}^m$)

Da sequencia longa do par

$$\Rightarrow H_k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m - \{x\}) \cong \tilde{H}_k(\underbrace{\mathbb{R}^m - \{x\}}_{\substack{\text{h.e.} \\ \text{à } S^{m-1}}}) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } k = m-1 \\ 0 & \text{se } k \neq m-1 \end{cases}$$

Logo, se $\varphi : U \to V$ é homeo

$\Rightarrow \varphi : (U, U - \{x\}) \longrightarrow (V, V - \{\varphi(x)\})$ é homeo

$\Rightarrow \varphi_* : H_k(U, U - \{x\}) \longrightarrow (V, V - \{\varphi(x)\})$

$\Rightarrow m = n$ ∎