Aula 14

Homologia Singular

- $\Delta^p = [e_0, \dots, e_p]$ p-simplexo padrão
- $F_i : \Delta^{p-1} \longrightarrow \Delta^p$ i-ésima face (Face map)

$[e_0, \dots, e_{p-1}] \mapsto [e_0, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_p]$ (Aplicação "Linear")

i.e., se $x = \sum_{i=0}^{p-1} \lambda_i e_i \Rightarrow F_i(x) = \lambda_0 e_0 + \dots + \lambda_{i-1} e_{i-1} + \lambda_i e_{i+1} + \dots + \lambda_p e_p$

<u>Def</u>: Seja X espaço topológico. Um <u>p-simplexo singular</u> em X é uma aplicação uma aplicação contínua

$$\sigma : \Delta^p \longrightarrow X$$

- Seja R um anel com unidade.

<u>Def</u>: <u>O complexo de cadeias singulares de X com coeficientes em R</u> é o complexo de cadeias $(C_p(X,R), \partial)$ onde

$$C_p(X,R) = \{ \underbrace{\sum_\sigma r_\sigma \sigma}_{\text{Soma finita}} \mid \sigma : \Delta^p \longrightarrow X \}; \quad \partial : C_p(X,R) \longrightarrow C_{p-1}(X,R)$$

$$\partial \sigma = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \sigma \circ F_i$$

- <u>Notação</u>: $C_p(X,R) = C_p^{sing}(X,R)$ (Quando mais que um complexo de cadeias for discutido ao mesmo tempo)

- $C_p(X,R) = C_p(X)$ Quando não causar confusão

- Como default, vou tomar $R = \mathbb{Z}$

<u>Lema/Exercício</u> $\partial^2 = 0$

<u>OBS</u>: Existe uma abordagem axiomática para homologia. No que segue, vou indicar quais resultados são axiomas de uma teoria de homologia.

- **Homologia Singular de X com coef. em R**
  - $Z_p(X,R) = \ker \partial : C_p(X,R) \longrightarrow C_{p-1}(X,R)$ = p-ciclos singulares
  - $B_p(X,R) = \mathrm{Im}\, \partial : C_{p+1}(X,R) \to C_p(X,R)$ = p-bordos singulares
  - $H_p(X,R) = H_p^{sing}(X,R) = \dfrac{Z_p(X,R)}{B_p(X,R)}$

- **Aplicação Induzida**: Seja $f : X \to Y$ contínua

$\Rightarrow f$ induz aplicação de cadeia $\forall p$

$$f_* : C_p(X,R) \longrightarrow C_p(Y,R)$$
$$f_*(\sigma) = f \circ \sigma$$

$$\Rightarrow \quad f_* : H_p(X,R) \longrightarrow H_p(Y,R)$$
$$f_*[\sigma] = [f_* \sigma]$$

Axioma:

A associação $X \longmapsto H_p(X,R)$, $f \longmapsto f_*$ é um functor (Exercício)

Proposição (Axioma) Se $X = \coprod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$ (com a topologia da união disjunta: $X_\alpha \subset X$ são abertos)

$$\Rightarrow H_p(X,R) = \coprod_{\alpha \in} H_p(X_\alpha, R) \quad \forall p$$

Dem: Se $C \subset X$ é uma componente conexa por arcos $\Rightarrow C \subset X_\alpha$ para algum $\alpha \in \Lambda$. Como Δ^p é conexo por arcos e $\sigma : \Delta^p \to X$ é contínua $\Rightarrow \mathrm{Im}\, \sigma \subset X_\alpha$ para um único $\alpha \in \Lambda$

Logo, $C_p(X,R) = \bigoplus_\alpha C_p(X_\alpha, R)$ & $\partial : C_p(X_\alpha, R) \longrightarrow C_{p-1}(X_\alpha, R)$

$$\Rightarrow H_p(X,R) = \bigoplus_\alpha H_p(X_\alpha, R)$$

$\blacksquare$

Exercício: Mostre que X é conexo por caminhos $\Leftrightarrow H_0(X,R) \cong R$

<u>Prop</u> (Axioma) Se $X = \{pt\} \Rightarrow H_p(X,R) = \begin{cases} R & \text{se } p=0 \\ 0 & \text{se } p>0 \end{cases}$

<u>Dem</u>: Para cada p, existe um unico p-simplexo singular $\sigma_p : \Delta^p \longrightarrow \{pt\}$ (Aplicação Constante)

Logo, o complexo $(C_p(X,R), \partial)$ é

$$\cdots R \xrightarrow{\partial_{p+1}} R \xrightarrow{\partial_p} R \xrightarrow{\partial_{p-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_1} R \xrightarrow{\partial_0} 0$$

onde em grau p, $R \cong \langle \sigma_p \rangle_R$.

Vamos calcular ∂_p:

$$\partial_p(\sigma_p) = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i F_i \circ \sigma_p = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \sigma_{p-1} = \begin{cases} \sigma_{p-1} & \text{se } p \text{ é par} \\ 0 & \text{se } p \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

ou seja, temos o complexo

$$\cdots \xrightarrow{0} R \xrightarrow{Id} R \xrightarrow{0} \cdots \xrightarrow{Id} R \xrightarrow{0} R \longrightarrow 0$$

$$\Rightarrow H_p(pt, R) \cong \begin{cases} R & \text{se } p=0 \quad \left(\frac{R}{\{0\}}\right) \\ \frac{R}{R} & \text{se } p \text{ é ímpar} \quad (=0) \\ \frac{0}{0} & \text{se } p \text{ é par} \quad (=0) \end{cases}$$

$\blacksquare$

<u>Teorema</u>: (Invariância por Homotopia) (Axioma)

Se $f, g : X \longrightarrow Y$ & $f \simeq g$ (homotópico)

$\Rightarrow f_* = g_* : H_\bullet(X,R) \longrightarrow H_\bullet(Y,R)$.

Dem:

seja $H: X \times I \to Y$ a homotopia. Vamos usar H para construir uma homotopia de cadeia h entre f_* e g_*, ou seja

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C_{p+1}(X) \arrow[r] \arrow[dl, "h_{p+1}"'] \arrow[d, shift right, "f_*"'] \arrow[d, shift left, "g_*"] & C_p(X) \arrow[r] \arrow[dl, "h_p"'] \arrow[d, shift right, "f_*"'] \arrow[d, shift left, "g_*"] & C_{p-1}(X) \arrow[r] \arrow[dl, "h_{p-1}"'] \arrow[d, shift right, "f_*"'] \arrow[d, shift left, "g_*"] & \cdots \arrow[dl, "h_{p-2}"'] \\
\cdots \arrow[r] & C_{p+1}(Y) \arrow[r] & C_p(Y) \arrow[r] & C_{p-1}(Y) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

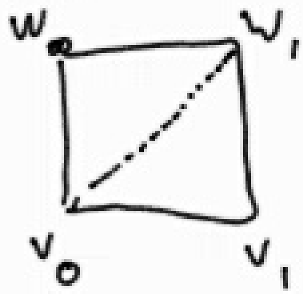
tal que

$$g_* - f_* = \partial h + h \partial$$

Problema: $\Delta^p \times I$ não é um $p+1$-simplexo

Solução: Decompor de forma natural $\Delta^p \times I$ como uma "soma" de $(p+1)$-simplexos

Exemplo: $\Delta^1 \times I \cong I \times I$



"=" $(v_0, v_1, w_1) + (v_0, w_0, w_1)$

Em geral: Consider em $\Delta^p \times I$, $v_i = (e_i, 0)$, $w_i = (e_i, 1)$

Temos inclusões $L_i : \Delta^{p+1} \longrightarrow \Delta^p \times I$;

$$L_i(e_0, \dots, e_p) = (v_0, \dots, v_i, w_i, w_{i+1}, \dots, w_p)$$

E obtemos para cada $\sigma : \Delta^p \to X$

$$\Delta^{p+1} \xrightarrow{L_i} \Delta^p \times I \xrightarrow{(\sigma \times Id)} X \times I \xrightarrow{H} Y$$

Defina: $h_p : C_p(X,R) \longrightarrow C_{p+1}(Y,R)$

$$h_p(\sigma) = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i H \circ (\sigma \times Id) \circ L_i$$

Vamos ver que $\partial \circ h + h \circ \partial = g_* - f_*$

$$\partial h_p(\sigma)(e_0,\dots,e_p) = \sum_{j=0}^{p+1} (-1)^j h_p(\sigma) \circ F_j (e_0,\dots,e_p) =$$

$$= \sum_{j\leq i} (-1)^j (-1)^i H \circ (\sigma \times Id)(v_0,\dots,\hat{v}_j,\dots,v_i,w_i,\dots,w_p)$$

$$+ \sum_{j\geq i} (-1)^{j+1} (-1)^i H \circ (\sigma \times Id)(v_0,\dots,v_i,w_i,\dots\hat{w}_j,\dots,w_p)$$

$$h_{p-1}(\partial\sigma)(e_0,\dots,e_p) = h_{p-1}\left(\sum_{j=0}^{p} (-1)^j \sigma \circ F_j\right)(e_0,\dots,e_p) =$$

$$= \sum_{j<i} (-1)^{i-1} (-1)^j H \circ (\sigma \times Id)(v_0,\dots,\hat{v}_j,\dots,v_i,w_i,\dots w_j,\dots,w_p)$$

$$+ \sum_{j>i} (-1)^i (-1)^j H \circ (\sigma \times Id)(v_0,\dots,v_i,w_i,\dots,\hat{w}_j,\dots,w_p)$$

Logo,

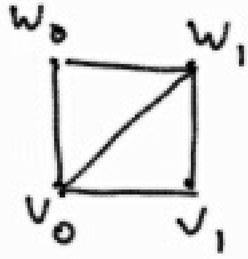
$$(\partial h + h \partial)(\sigma) = H \circ (\sigma \times Id)(\hat{v}_0, w_0,\dots,w_p) - H \circ (\sigma \times Id)(v_0,\dots,v_p,\hat{w}_p)$$

$$= g \circ \sigma - f \circ \sigma$$

$$= g_*(\sigma) - f_*(\sigma)$$

PARA ENTENDER A CONTA ACIMA, veja o exemplo à seguir.

Exemplo: $p = 1$



⑥

- $L_0 : \Delta^2 \longrightarrow \Delta^1 \times I$

$$L_0(e_0, e_1, e_2) = (v_0, w_0, w_1)$$

- $L_1(e_0, e_1, e_2) = (v_0, v_1, w_1)$

$\Rightarrow$

$$L_0(e_1,e_2) = (w_0,w_1)$$
$$L_0(e_0,e_2) = (v_0,w_1)$$
$$L_0(e_0,e_1) = (v_0,w_0)$$
$$L_1(e_1,e_2) = (v_1,w_1)$$
$$L_1(e_0,e_2) = (v_0,w_1)$$
$$L_1(e_0,e_1) = (v_0,v_1)$$

- $h(\sigma) = H \circ (\sigma \times Id) \circ L_0 - H \circ (\sigma \times Id) \circ L_1$

Logo,

$$\partial h(\sigma)(e_0,e_1) = \sum_{i=0}^{2} (-1)^i h(\sigma) \circ F_i(e_0,e_1) = h(\sigma)(e_1,e_2) - h(\sigma)(e_0,e_2) + h(\sigma)(e_0,e_1)$$

$$= H\circ(\sigma\times Id)(w_0,w_1) - \cancel{H\circ(\sigma\times Id)(v_0,w_1)} + \cancel{H\circ(\sigma\times Id)(v_0,w_0)} - \cancel{H\circ(\sigma\times Id)(v_1,w_1)} +$$
$$+ \cancel{H\circ(\sigma\times Id)(v_0,w_1)} - H\circ(\sigma\times Id)(v_0,v_1)$$

$$h(\partial\sigma)(e_0,e_1) = H(\partial\sigma\times Id)L(e_0,e_1) = \cancel{H\circ(\sigma\times Id)(v_1,w_1)} - \cancel{H\circ(\partial\sigma\times Id)(v_0,w_0)}$$

$$\Rightarrow (h\partial\sigma + \partial h\sigma)(e_0,e_1) = H\circ(\sigma\times Id)(w_0,w_1) - H\circ(\sigma\times Id)(v_0,v_1) = g_*(\sigma)(e_0,e_1) - f_*(\sigma)(e_0,e_1)$$

■

Corolário: Se $f : X \to Y$ é equivalência de homotopia $\Rightarrow f_* : H_p(X,R) \longrightarrow H_p(Y,R)$ é isomorfismo $\forall p$.

- **Homologia Relativa**

Seja (X,A) um par de espaços topológicos (i.e., $A \subset X$ subesp.)

Def: $C_p(X,A\,;R) = \dfrac{C_p(X;R)}{C_p(A;R)}$ com $\partial\overline{\sigma} = \overline{(\partial\sigma)}$ | $H_p(X,A;R) =$ homologia desse complexo

OBS: Podemos identificar $\overline{\sigma} \in C_p(X,A)$, $\overline{\sigma} \neq 0$, com $\sigma \in C_p(X)$ t.q. $\mathrm{Im}\,\sigma \not\subset A$ }

Uma aplicação

$$f:(X,A)\longrightarrow(Y,B)\qquad (f(A)\subseteq f(B))$$

Induz $f_*: H_p(X,A)\longrightarrow H_p(Y,B)$

& a associação

H_p: Pares de Esp. Top $\longrightarrow$ R-módulos é functorial

- <u>Sequencia longa do par</u>:

Temos uma sequencia curta exata

$$0\longrightarrow C_p(A)\xrightarrow{i} C_p(X)\xrightarrow{j} C_p(X,A)\longrightarrow 0$$

$\Rightarrow$ Induz sequencia longa exata

$$\cdots H_p(A)\rightarrow H_p(X)\rightarrow H_p(X,A)\xrightarrow{\partial_*} H_{p-1}(A)\rightarrow\cdots$$

<u>Proposição</u>: (Naturalidade) (Axioma)

O morfismo $\partial_*: H_p(X,A)\longrightarrow H_{p-1}(A)$ é natural, i.e.,

Se $f:(X,A)\longrightarrow(Y,B)$, então

$$\begin{array}{ccc} H_p(X,A) & \xrightarrow{\partial_*} & H_{p-1}(A)\\ f_*\downarrow & & \downarrow f_*\\ H_p(Y,B) & \xrightarrow[\partial_*]{} & H_{p-1}(B)\end{array}$$

<u>Dem</u>: $c \in C_p(X)$ representa $[c] \in H_p(X,A)$
$\iff \partial c \in C_p(A)$.

segue que

$$\partial_*[c]_{H_p(X,A)} = [\partial c]_{H_{p-1}(A)}$$

$$\Rightarrow f_* \partial_* [c] = f_*[\partial c]_A = [f_* \partial c]_B = [\partial f_* c]_B = \partial_* f_* [c]$$

<u>Corolário</u>: Se $A \subset U \subset X$ e $i: A \hookrightarrow U$ é equivalencia de hom.
$\Rightarrow i: (X,A) \hookrightarrow (X,U)$ induz isomorfismo em homologia.

<u>Dem</u>: Temos

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_p(A) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & H_p(X) \arrow[r] \arrow[d, "="] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & H_p(X,A) \arrow[r, "\partial_*"] \arrow[d, "i_*"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & H_{p-1}(A) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & H_{p-1}(X) \arrow[r] \arrow[d, "="] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H_p(U) \arrow[r] & H_p(X) \arrow[r] & H_p(X,U) \arrow[r, "\partial_*"'] & H_{p-1}(U) \arrow[r] & H_{p-1}(X) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

o resultado segue de:

<u>Lema do cinco (Exercício)</u>

sejam

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r] \arrow[d, "f_1"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & A_2 \arrow[r] \arrow[d, "f_2"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & A_3 \arrow[r] \arrow[d, "f_3"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & A_4 \arrow[r] \arrow[d, "f_4"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & A_5 \arrow[d, "f_5"] \\
B_1 \arrow[r] & B_2 \arrow[r] & B_3 \arrow[r] & B_4 \arrow[r] & B_5
\end{tikzcd}$$

sequencias exatas de R-módulos
(Todos os quadrados comutam)

Se f_1, f_2, f_4, f_5 são $\cong$
$\Longrightarrow f_3$ é $\cong$

Exercício: Seja $A \subset B \subset X$. Mostre que existe uma sequencia longa exata

$$\cdots \longrightarrow H_p(B,A) \longrightarrow H_p(X,A) \longrightarrow H_p(X,B) \xrightarrow{\partial_*} H_{p-1}(B,A) \longrightarrow \cdots$$

onde ∂_* é natural. Descreva ∂_* explicitamente.

• Homologia Reduzida:

Considere o complexo aumentado:

$$\cdots \xrightarrow{\partial} C_p(X,R) \xrightarrow{\partial} C_{p-1}(X,R) \xrightarrow{\partial} \cdots \xrightarrow{\partial} C_1(X,R) \xrightarrow{\partial} C_0(X,R) \xrightarrow{\varepsilon} R \to 0$$

onde $\varepsilon : C_0(X,R) \longrightarrow R$, $\varepsilon(\Sigma r_\sigma \sigma) = \Sigma r_\sigma$

Def: A Homologia reduzida de X é a homologia deste complexo (Denotada por $\tilde{H}_p(X,R)$)

Exercício: Mostre que

(i) $\tilde{H}_p(X,R) = H_p(X,R)$ se $p>0$

(ii) $\tilde{H}_0(X,R) \oplus R \cong H_0(X,R)$ (Em particular $\tilde{H}_0(X,R)=0$ se X é conexo por caminhos)

(iii) $\tilde{H}_p(X;R) \cong H_p(X, x_0; R)$ onde $x_0 \in X$

Exercício: Construa a sequência longa exata para a homologia reduzida do par (X,A).