Aula 13

Álgebra Homológica

• **Complexos de Cadeias:**

Seja R um anel comutativo com unidade (e.g. $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_k, \mathbb{R}$).

Def: Um complexo de cadeias sobre $\mathbb{R}$ é $C = \{(C_n, \partial_n)\}$ onde $n \in \mathbb{N}$, C_n é um R-módulo e $\partial_n : C_n \longrightarrow C_{n-1}$ é um homomorfismo satisfazendo

$$\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$$

$$(\partial^2 = 0)$$

Exemplo: $C = \{C_n(K), \partial_n\}$ onde K é um complexo simplial. ($R = \mathbb{Z}$).

Def: R-módulos
$$\begin{cases} Z_n(C) = \operatorname{Ker} \partial_n = n\text{-cíclos de } C \\ B_n(C) = \operatorname{Im} \partial_n = n\text{-Bordos de } C \\ H_n(C) = \dfrac{Z_n(C)}{B_n(C)} = n\text{-ésima homologia de } C. \end{cases}$$

Exemplo: Seja K um complexo simplicial, e $C_p(K, R) =$ R-módulo livre gerado pelos p-simplexo orientados de de K, módulo $(-1)\cdot\sigma = -\sigma$

$$= \left\{ \Sigma r_\sigma \sigma \;\middle|\; \sigma \text{ é p-simplexo orientado}, r_\sigma \in R \right\}$$

∂ é definido da mesma forma. $r_\sigma = 0$ q.s /n

Exercício: Seja K um pseudo-variedade fechada de dimensão n (orientável ou não) Mostre que $H_n(K, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$.

Em Geral: Dado qualquer complexo de $\mathbb{Z}$-módulos (grupos abelianos), podemos formar um complexo

$$C \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} R = \{(C_n \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} R, \partial_n \otimes Id_R)\}$$

- Seja $\mathbb{K}$ um corpo, e $C_\bullet$ um complexo de espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$. Suponha que
  - $\dim C_n$ é finito $\forall n$
  - $C_n = 0 \quad \forall n > N$.

<u>Teorema</u> $\chi(C) = \sum_{i=0}^{N} (-1)^i \dim_{\mathbb{K}} C_i = \sum_{i=0}^{N} (-1)^i \dim_{\mathbb{K}} H_i(C, \mathbb{K})$

<u>Dem</u>: $\partial_i : C_i \longrightarrow C_{i-1}$ é linear. Logo, pelo teorema do isomorfismo

$$\dim \operatorname{Ker} \partial_i + \dim \operatorname{Im} \partial_i = \dim C_i$$

$$\Rightarrow \dim C_0 - \dim C_1 + \dim C_2 - \cdots =$$

$$= \underbrace{\dim \operatorname{Ker} \partial_0}_{\dim H_0} - (\underbrace{\dim \operatorname{Ker} \partial_1 + \dim \operatorname{Im} \partial_0}_{\dim H_1}) + (\underbrace{\dim \operatorname{Ker} \partial_2 - \dim \operatorname{Im} \partial_2}_{\dim H_2}) + \cdots$$

■

Consequência:

Def: Seja K complexo simplicial finito

O número de Euler de K é

$$\chi(K) = \sum_i (-1)^i n_i$$

onde $n_i = \#$ i-simplexos de K.

OBS: $\chi(K)$ só depende do tipo de homotopia de $|K|$!

- Se $t: |K| \to X$ é triangulação $\Rightarrow \chi(X) := \chi(K)$.

Exercício: Calcule $\chi(X)$ para: $X = T^2$; $X = \mathbb{P}^2$, $X = S^n$; $X = T^2 \# \mathbb{P}^2$

OBS: Os números $b_i = \dim_{\mathbb{K}} C_i$ são chamados os números de Betti de $C_\bullet$ com relação à $\mathbb{K}$

- Morfismos & Homotopias

Sejam (A, ∂_A), (B, ∂_B) complexos de R-módulos.

Um morfismo (aplicação de Cadeias) de A para B é uma coleção $\varphi_n : A_n \to B_n$ de morfismos de R-módulos tal que $\varphi_{n-1}\partial_A = \partial_B \varphi_n$ $\forall n$, i.e.,

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & A_{n+1} \arrow[r, "\partial_A"] \arrow[d, "\varphi_{n+1}"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & A_n \arrow[r, "\partial_A"] \arrow[d, "\varphi_n"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & A_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_{n-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & B_{n+1} \arrow[r, "\partial_B"'] & B_n \arrow[r, "\partial_B"'] & B_{n-1} \arrow[r] &
\end{tikzcd}$$

Em particular, φ induz

$$\varphi_* : H_n(A) \longrightarrow H_n(B) \quad \forall n$$ (Exercício. Igual a última aula)

$$\varphi_*[z]_A = [\varphi(z)]_B$$ (Functorial!)

Pergunta: Quando dois morfismos de complexos induzem o mesmo morfismo em Homologia?

Def: Uma homotopia (de cadeias/algébrica) entre $\phi, \psi : (A, \partial) \to (B, \partial)$ é uma sequencia $h_n : A_n \to B_{n+1}$ de morfismos de R-módulos tal que

$$\phi - \psi = \pm\left(\partial_B h_n \pm h_{n-1} \partial_A\right)$$

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & A_{n+1} \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, shift right, "\varphi"'] \arrow[d, shift left, "\psi"] \arrow[dl, "h_{n+1}"'] & A_n \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, shift right, "\varphi"'] \arrow[d, shift left, "\psi"] \arrow[dl, "h_n"'] & A_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, shift right, "\varphi"'] \arrow[d, shift left, "\psi"] \arrow[dl, "h_{n-1}"'] & \cdots \arrow[dl, "h"'] \\
\cdots \arrow[r] & B_{n+1} \arrow[r, "\partial"'] & B_n \arrow[r, "\partial"'] & B_{n-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Prop: Se $\phi \sim \psi$ (homotópico) $\Rightarrow \varphi_* = \psi_*$

Dem: Seja $z \in C_n(A)$ um ciclo. Então $\varphi_*[z] - \psi_*[z] = [\varphi(z) - \psi(z)] =$
$= \pm[\partial h_n(z) \pm h_{n-1} \partial z] = \pm[\partial h_n(z)]$
$= 0$ ■

OBS: Vamos ver depois que aplicações $f, g : X \to Y$ homotópicas induzem $f_*, g_* : C.(X) \to C.(Y)$ algebricamente homotópicas

Sequencias Exatas

Sejam $\mathcal{A} = (A., \partial_A)$, $\mathcal{B} = (B., \partial_B)$, $\mathcal{C} = (C., \partial_C)$ complexos.

Def: Uma sequencia curta exata de complexos é uma sequencia

$$0 \longrightarrow \mathcal{A} \xrightarrow{\phi} \mathcal{B} \xrightarrow{\psi} \mathcal{C} \longrightarrow 0$$

de morfismos de cadeia tal que a seq.

$$0 \longrightarrow A_n \xrightarrow{\phi_n} B_n \xrightarrow{\psi_n} C_n \longrightarrow 0$$

é exata $\forall n$, ou seja

- ϕ_n é injetor $(\operatorname{Ker} \phi_n = 0 = \operatorname{Im}(0 \hookrightarrow A_n))$
- $\operatorname{Ker} \psi_n = \operatorname{Im} \phi_n$
- ψ_n é sobrejetor $(\operatorname{Im} \psi_n = \operatorname{Ker}(C_n \to \{0\}))$

Teorema: Dada uma sequencia curta exata

$$0 \longrightarrow \mathcal{A} \xrightarrow{\phi} \mathcal{B} \xrightarrow{\psi} \mathcal{C} \longrightarrow 0$$

existe $\forall n \in \mathbb{N}$ um morfismo $\partial_* : H_n(\mathcal{C}) \longrightarrow H_{n-1}(\mathcal{A})$ tal que a sequencia

$$\cdots \to H_{n+1}(\mathcal{C}) \xrightarrow{\partial_*} H_n(\mathcal{A}) \xrightarrow{\phi_*} H_n(\mathcal{B}) \xrightarrow{\psi_*} H_n(\mathcal{C}) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(\mathcal{A}) \to \cdots$$

$\hookrightarrow H_0(\mathcal{A}) \to H_0(\mathcal{B}) \to H_0(\mathcal{C}) \to 0$

É EXATA (Im (anterior) = Ker (seguinte))

Dem: Construção de ∂_*: Casa ao diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & \arrow[d] & \arrow[d] & \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "\partial"] & B_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "\partial"] & C_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "\partial"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_n \arrow[r] \arrow[d, "\partial"] & B_n \arrow[r] \arrow[d, "\partial"] & C_n \arrow[r] \arrow[d, "\partial"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & B_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & & &
\end{tikzcd}$$

$b \longmapsto c$, $\partial c = 0$

$a \longmapsto \partial b \longmapsto 0$

Seja $c \in C_{n+1}$ um ciclo. Escolha b t.q. $\psi(b) = c$

$\Rightarrow \psi(\partial b) = \partial \psi b = \partial c = 0 \Rightarrow b = \phi(a)$, $a \in A$

$\Rightarrow \partial_*[c] = [a]$

① $\partial a = 0$ $([a] \in H_n(\mathcal{A}))$: $\phi \partial a = \partial \phi(a) = \partial^2 b = 0$ (ϕ é injetor)

② ∂_* não depende da escolha de $b \xmapsto{\psi} c$:

se $\psi(b') = c \Rightarrow \psi(b - b') = 0 \Rightarrow b - b' = \phi(\bar{a}) \Rightarrow \partial \bar{a} = a - a'$ pois $\phi(\partial \bar{a}) = \partial \phi(\bar{a})$
$= \partial b - \partial b' =$
$= \phi(a) - \phi(a')$

③ $\partial_*[c]$ não depende do representante c:

Suponha que $c = \partial \bar{c}$. seja $\bar{b}$ t.q. $\psi \bar{b} = \bar{c}$. $\Rightarrow \psi(\partial \bar{b} - b) = \underbrace{\partial \psi \bar{b}}_{\partial \bar{c} = c} - \underbrace{\psi b}_{c} = 0$

$\Rightarrow \psi(\partial \bar{b}) = \psi(b) = c \Rightarrow [a] = [a']$ onde $\phi(a') = \partial \partial \bar{b} = 0$
$\Rightarrow a' = 0$

④ Exato em $H_n(\mathcal{A})$ (i.e., $\mathrm{Im}\,\partial_* = \mathrm{Ker}\,\phi_*$)

(i) $\mathrm{Im}\,\partial_* \subset \mathrm{Ker}\,\phi_*$ ($\phi_* \circ \partial_* = 0$):

$$\phi_* \partial_* [c] = [\phi(a)] = [\partial b] = 0$$

(ii) $\mathrm{Ker}\,\phi_* \subset \mathrm{Im}\,\partial_*$

Suponha $\phi_*[a] = [\phi(a)] = 0 \Rightarrow \phi(a) = \partial b$. Seja $c = \psi(\partial b)$. Então $\partial c = \partial \psi(\partial b) = \partial^2 \psi(b) = 0 \Rightarrow [c] \in H_{n-1}(\mathcal{C})$. Mas $\underbrace{\partial_*[c] = [a]}_{\text{por construção}}$

⑤ Exato em $H_n(\mathcal{C})$: ($\mathrm{Ker}\,\partial_* = \mathrm{Im}\,\psi_*$)

(i) $\mathrm{Im}\,\psi_* \subset \mathrm{Ker}\,\partial_*$:

$$\partial_* \psi_* \underbrace{[b]}_{\substack{\partial b = 0 \\ \text{ciclo!}}} = \partial_* [\psi(b)] = [a] \text{ t.q. } \phi(a) = \partial b = 0$$

(ii) $\mathrm{Ker}\,\partial_* \subset \mathrm{Im}\,\psi_*$

suponha que $\underbrace{\partial_*[c] = [a] = 0}_{\phi(a) = \partial b,\ \psi(b) = c} \Rightarrow \exists\, \bar{a} \in C_n(\mathcal{A}),\ \partial \bar{a} = a.$

$$\Rightarrow \partial \phi(\bar{a}) = \phi \partial \bar{a} = \phi(a) = \partial b \Rightarrow \partial(b - \phi \bar{a}) = 0 \Rightarrow [b - \phi(\bar{a})] \in H_n(\mathcal{B})$$

mas $\psi(b - \phi(\bar{a})) = \psi(b) - \psi\phi(\bar{a}) = \psi(b) = c$.

<u>Exercício</u>: Mostre que a sequência é exata em $H_n(\mathcal{B})$. ▫

<u>Consequência p/ Homologia Simplicial:</u>

① <u>Sequencia Longa Exata do Par</u>

Sejam $L \subset K$ complexos simpliciais. Seja $C_\cdot(K, L)$ o complexo

$$C_p(K, L) = \frac{C_p(K)}{C_p(L)} \quad \text{com} \quad \partial : C_p(K, L) \longrightarrow C_{p-1}(K, L)$$
$$\partial \bar{c} = \overline{\partial c} \quad (\bar{c} = c \bmod C_p(L)).$$

(Complexo Relativo)

A sequencia curta exata

$$0 \to C_\cdot(L) \xrightarrow{i} C_\cdot(K) \xrightarrow{j} C_\cdot(K,L) \to 0$$

Induz uma sequencia longa exata

$$\cdots \to H_{n+1}(K,L) \xrightarrow{\partial_*} H_n(L) \xrightarrow{i_*} H_n(K) \xrightarrow{j_*} H_n(K,L) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(L) \to \cdots$$

Descrisão explicita de ∂_*:

seja $\bar{c} \in C_{n+1}(K,L)$ um ciclo. $\Rightarrow$ Podemos repersentar $\bar{c}$ por $c \in C_{n+1}(K)$, $\partial c \in C_n(L)$

$$\Rightarrow \boxed{\partial_*[\bar{c}] = [\partial c]_L}$$

Exercício: Seja $v \in K$ um vértice. $|K|$ conexo.

Mostre que $H_n(K,v) = \begin{cases} H_n(K) & \text{se } n > 0 \\ 0 & \text{se } n = 0 \end{cases}$

($H_n(K,v) = \tilde{H}_n(K)$ é a homologia reduzida de K)

• Vimos que se $(K, \partial K)$ é pseudo-varidade de dim n com bordo $\partial K \neq \emptyset$ $\Rightarrow H_n(K) = 0$ (orientável ou não). Suponha K orientado

Considere a sequencia longa do par $(K, \partial K)$.

$$0 \to \underset{\overset{\parallel}{0}}{H_n(\partial K)} \to \underset{\overset{\parallel}{0}}{H_n(K)} \to H_n(K,\partial K) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(\partial K) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(K) \to \cdots$$

Note que $i_{*,n-1} \equiv 0$, pois $i_*[\partial K]$ é um bordo em K $\begin{pmatrix} i_*[\partial K] = \\ = \partial[K] \end{pmatrix}$

Logo ∂_* é $\cong$ $\Rightarrow$ $H_n(K, \partial K) \cong \mathbb{Z} = \mathbb{Z}\langle [K] \rangle$.

Exercício: Calcule $H_n(K, \partial K)$ quando K não é orientável.

Sequencia de Mayer-Vietoris

Seja K um complexo simplicial e sejam K_1 & K_2 subcomplexos tais que $K = K_1 \cup K_2$. Considere a sequencia curta exata

$$0 \longrightarrow C_p(K_1 \cap K_2) \xrightarrow{(i_{1*}, i_{2*})} C_p(K_1) \oplus C_p(K_2) \xrightarrow{j_{1*} - j_{2*}} \underbrace{C_p(K_1 \cup K_2)}_{C_p(K)} \to 0.$$

(OBS: MOSTRE QUE É EXATA!)

$$\sigma \longmapsto (\sigma, \sigma)$$

$$(\sigma, \tau) \longrightarrow \sigma - \tau$$

Obtemos uma sequencia longa exata (Sequencia de Mayer-Vietoris)

$$\cdots \to H_n(K_1 \cap K_2) \longrightarrow H_n(K_1) \oplus H_n(K_2) \to H_n(K) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(K_1 \cap K_2) \to \cdots \to H_0(K) \to 0$$

Exercício (Muito Importante!): Descreva $\partial_* : H_n(K) \to H_{n-1}(K_1 \cap K_2)$ explicitamente.

Exercício: Seja K_1, K_2 Pseudo variedades de dim n. Calcule $H_*(K_1 \# K_2)$ (Soma conexa está definido na lista 3).