Aula 12

O Teorema da Aproximação Simplicial

• Aplicações Simpliciais

Sejam K, L complexos simpliciais

<u>Def</u>: Uma aplicação $f : |K| \longrightarrow |L|$ é uma <u>aplicação simplicial</u> se

- $(v_{\alpha_1}, \dots, v_{\alpha_\ell}) \in K \Longrightarrow f(v_{\alpha_1}), \dots, f(v_{\alpha_\ell})$ são vértices de algum simplexo de L
- f é linear nos simplexos: $\boxed{f\left(\sum \lambda_i v_{\alpha_i}\right) = \sum \lambda_i f(v_{\alpha_i})}$

<u>OBS</u>: $(f(v_{\alpha_1}), \dots, f(v_{\alpha_\ell}))$ não precisa ser um simplexo de L pois $f(v_{\alpha_1}), \dots, f(v_{\alpha_\ell})$ não precisam ser distintos.

Para cada p, f induz

$$f_{*,p} = f_* : C_p(K) \longrightarrow C_p(L)$$ (Homomorfismo de Grupos Abelianos)

$$f_*([v_{\alpha_0}, \dots, v_{\alpha_p}]) = \begin{cases} [f(v_{\alpha_0}), \dots, f(v_{\alpha_p})] & \text{se } f(v_{\alpha_i}) \neq f(v_{\alpha_j}) \ \forall i \neq j \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

<u>Lema</u>: $f_*: C_*(K) \longrightarrow C_*(L)$ é uma aplicação de cadeias, i.e., $f_* \partial = \partial f_*$

$$\begin{tikzcd} C_p(K) \arrow[r, "f_{*,p}"] \arrow[d, "\partial"'] & C_p(L) \arrow[d, "\partial"] \\ C_{p-1}(K) \arrow[r, "f_{*,p-1}"'] & C_{p-1}(L) \end{tikzcd}$$

<u>Dem</u>: • suponha $f_*(v_i) \neq f(v_j)$ $\forall i,j$

$$\partial f_* [v_0, \dots, v_p] = \partial [f(v_0), \dots, f(v_p)] = \sum (-1)^i [f(v_0), \dots, \widehat{f(v_i)}, \dots, f(v_p)] =$$

$$= f_* \sum (-1)^i [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_p] = f_* \partial [v_0, \dots, v_p]$$

• Agora suponha $f(v_i) = f(v_j)$ para algum i, j

e.g., $f(v_0) = f(v_1)$:

$$\partial f_* [v_0, \dots, v_p] = \partial 0 = 0$$

$$f_* \partial [v_0, \dots, v_p] = f_* \sum (-1)^i [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_p] =$$

$$= [f(v_1), \dots, f(v_p)] - [f(v_0), f(v_2), \dots, f(v_p)]$$

$$= 0 \quad (\text{pois } f(v_1) = f(v_0))$$

∎

Consequência

f_* manda ciclo em ciclo & bordo em bordo

Pois $\bullet\ \partial z = 0 \Rightarrow \partial f_* z = f_* \partial z = 0$

$\bullet\ z = \partial w \Rightarrow f_* z = f_* \partial w = \partial f_* w$

Logo, f induz

$$\boxed{f_* : H_p(K) \longrightarrow H_p(L) \qquad \text{(homomorfismo Induzido.)}}$$

Exercício: (1) Mostre que se $K \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} M$

são aplicações simpliciais

$\Rightarrow (g \circ f)_* = g_* \circ f_* : H_p(K) \longrightarrow H_p(M)$

(2) Mostre que $(Id_K)_* = Id_{H_p(K)}$

Conclua que

$$\underbrace{H_p :}_{} \ \underset{\substack{\text{Categoria dos complexos simpliciais} \\ \& \\ \text{aplicações simpliciais}}}{\underset{\|}{Simp}} \longrightarrow \underbrace{GrpAb}_{\text{grupos abelianos e homomorfismos}} \quad \text{é um functor}$$

<u>Objetivo</u>: Mostrar que qualquer função contínua

$f: |K| \longrightarrow |L|$ pode ser aproximada

à um função simplicial $g: \underbrace{Sd^{(n)} K}_{\text{sub-divisão baricêntrica}} \longrightarrow L$

com $f \sim g$ (homotópico)

- Vou enunciar / Provar somente para cplxos finitos ~~todo ...~~

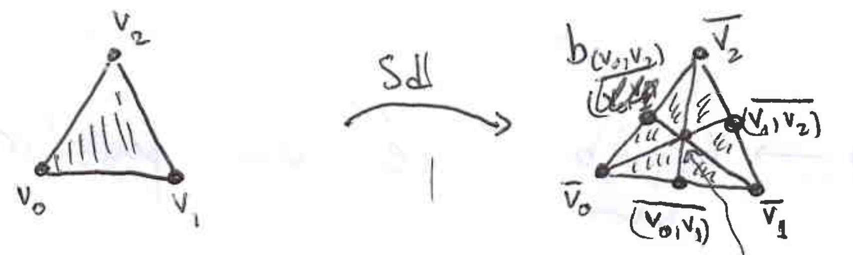
$$\boxed{\text{Assuma } K \text{ finito até o fim da Aula}}$$

- <u>Subdivisão Baricêntrica</u>:

Seja K um complexo simplicial. <u>A subdivisão baricênctrica de K</u> é o complexo simplicial

$$Sd(K) = \left\{ (b_{\sigma_0}, \dots, b_{\sigma_k}) \;\middle|\; b_{\sigma_i} \text{ é o baricentro de } \sigma_i \in K,\ \underbrace{\sigma_0 < \sigma_1 < \dots < \sigma_k}_{\text{face própria}} \right\}$$

<u>Exemplo</u>:



(v_0,v_1,v_2)
"
$b_{(v_0,v_1,v_2)}$

$K = \{(v_0), (v_1), (v_2), (v_0,v_1), (v_1,v_2), (v_0,v_2), (v_0,v_1,v_2)\}$

$Sd(K) = \dots\dots$ todos os simplexos acima

<u>Exercício</u>: Mostre que $|K| = |Sd^0(K)|$

Def: $\mathrm{Diam}(K) = \max\{\mathrm{diam}(\sigma) \mid \sigma \in K\}$

Exercício: Mostre que se $\dim K = n$ então

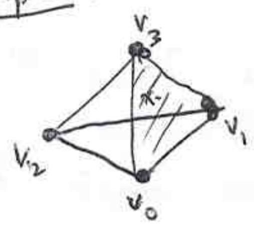
$$\boxed{\mathrm{Diam}(Sd(K)) \leq \frac{n}{n+1}\,\mathrm{Diam}(K)}$$

Logo, $$\lim_{\ell \to \infty} \mathrm{Diam}\left(Sd^{(\ell)}(K)\right) = 0$$

Def: Para $x \in |K|$, seja

$\mathrm{carr}(x) =$ carregador de $x =$ menor simplexo de K que contém x

Exemplo:



$\mathrm{carr}(x) = (v_0, v_1, v_3)$

Note que

$$y \in \mathrm{carr}(x) \iff \mathrm{carr}(y) \subset \mathrm{carr}(x)$$

Def: Seja $f : |K| \to |L|$ contínua. Uma aproximação simplicial de f é uma aplicação simplicial

$$g : |K| \longrightarrow |L|$$

tal que

$$\boxed{g(x) \in \mathrm{carr}\, f(x) \quad \forall x \in |K|}$$

(Equivalentemente, $\mathrm{carr}(g(x)) \subset \mathrm{carr}\, f(x) \quad \forall x$)

Prop: Se g é aproximação simplicial de f

$\Rightarrow$ $g \simeq f$ (homotópicos)

Dem: $\forall x \in |K|$, $g(x) \in \underbrace{\text{carr}\, f(x)}_{}$. Tome

é um simplexo
$\Downarrow$
convexo!

$$H(x,t) = t\,g(x) + (1-t)f(x)$$

Lema: Se $g: |K| \to |L|$ é simplicial

$\Rightarrow$ $g(\text{carr}(x)) = \text{carr}(g(x))$

Dem: Seja $(v_0, \dots, v_p) \in K$, $x = \sum \lambda_i v_i$ $\underbrace{\text{com } \lambda_i > 0 \ \forall i}_{}$

Essa condição diz que $\text{carr}(x) = (v_0, \dots, v_p)$

$\Rightarrow$ $g(x) = \sum \lambda_i g(v_i)$ (Mas é possível que o conjunto $\{g(v_0), \dots, g(v_p)\}$ tenha repetições)

mas

$$\boxed{\text{carr}(g(x)) = \text{fecho convexo de } \{g(v_0), \dots, g(v_p)\} = g(\text{carr}(x))}$$

Corolário: ~~Composta de apro~~ $|K| \overset{f_1}{\underset{g_1}{\rightrightarrows}} |L| \overset{f_2}{\underset{g_2}{\rightrightarrows}} |M|$

g_i aprox. simp. de f_i $\Rightarrow$ $g_2 \circ g_1$ é aprox. simp. de $f_2 \circ f_1$.

Dem: $g_2\circ g_1(x) \in g_2(\mathrm{carr}(g_1(x))) \subseteq g_2(\mathrm{carr}(f_1(x))) = \mathrm{carr}(g_2(f_1(x)))$ 7

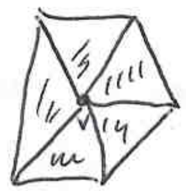
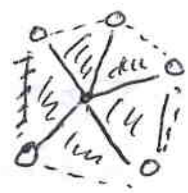
$$\mathrm{carr}(g_2(f_1(x))) \subseteq \mathrm{carr}(f_2\circ f_1(x))$$

$\square$

Def: Seja $v\in K$ um vértice. A estrela aberta de v é

$$\boxed{st_K(v) = \{x\in |K| \mid v\in \mathrm{carr}(x)\}}$$

~~Em outras palavras~~

 $\Rightarrow st_K(v) =$ 

Note que

$$\boxed{x\in St_K(x) \iff v\in \mathrm{carr}(x)}$$

Prop: $st_K(x)\subset |K|$ é aberto, e $\mathcal{U} = \{st_K(x)\}_{x\in|K|}$ é cobertura aberta

Dem: $|K| - st_K(v) =$ União de simplexos de K (*)

$\Rightarrow$ fechado

pois $\quad x\in |K| - st_K(v) \iff \mathrm{carr}(x)\cap st_K(v) = \emptyset$

Prop: Se $v_0, \dots, v_r \in K$ são vértices então

$$\bigcap_{i=0}^{r} st_K(v_i) \neq \phi \iff (v_0, \dots, v_r) \in K$$

Dem: $x \in \bigcap st_K(v_i) \iff v_i \in carr(x) \ \forall i \iff (v_0, \dots, v_r)$ é face de $carr(x)$

Teorema: (Aproximação Simplicial)

Seja K, L complexos simpliciais finitos,

$$f: |K| \longrightarrow |L| \quad \text{contínua.}$$

Então existe $r \geq 0$ tal que existe uma aproximação simplicial

$$g: |Sd^{(r)} K| \longrightarrow |L| \quad \text{de } f.$$

Dem: Sejam $\{w_i\}$ vértices de L,

$$U_i = f^{-1}(st_L(w_i))$$

$\Rightarrow \mathcal{U} = \{U_i\}$ é cobertura de $|K|$. Seja

$\delta > 0$ número de Lebesgue de $\mathcal{U}$

$$(\ diam(A) < \delta \Rightarrow A \subset U_i \text{ para algum } i\ )$$

Seja $r > 0$ tal que

$$Diam(Sd^{(r)} K) < \frac{\delta}{2}$$

Seja $v \in Sd^{(r)}(K)$ um vértice.

Se $x \in st_{Sd^{(r)}(K)}(v) \Rightarrow v \in carr(x)$

$\Rightarrow dist(x,v) \leq Diam(Sd^{(r)}(K)) < \frac{\delta}{2}$

$\Rightarrow diam\left(st_{Sd^{(r)}(K)}(v)\right) < 2 \cdot \frac{\delta}{2} = \delta$

$\Rightarrow st_{Sd^{(r)}(K)}(v) \subset U_i = f^{-1}\left(st_L(w_i)\right)$

ou seja

$$f\left(st_{Sd^{(r)}K}(v)\right) \subset st_L(w_i) \text{ para algum } i \quad (*)$$

defina: $g(v) = w_i$ onde w_i é algum vértice de L que satisfaz $(*)$

Afirmação: g é simplicial

Dem: Sejam $(v_0, \dots, v_p) \in Sd^{(r)}K$

$\Rightarrow \bigcap st_{Sd^{(r)}K}(v_i) \neq \phi$

$\Rightarrow \phi \neq f\left(\bigcap st_{Sd^{(r)}K}(v_i)\right) \subset \bigcap\left(f(st_{Sd^{(r)}K}(v_i)\right) \subset \bigcap st_L(g(v_i))$

$\Rightarrow g(v_0), \dots, g(v_p)$ são vértices de algum simplexo de L. ☒

Afirmação: g é aproximação simplicial de f

Dem: Precisamos mostrar que

$$g(x) \in carr(f(x)) \quad \forall x \in |Sd^{(r)} K|$$

Seja

$$x = \sum_{i=0}^{p} \lambda_i v_i \quad \text{onde} \quad (v_0, \dots, v_p) = carr(x)$$

$\Rightarrow v_i \in carr(x) \Rightarrow x \in st_{Sd^{(r)}K}(v_i) \ \forall i$

$\Rightarrow f(x) \in f(st_{Sd^{(r)}K}(v_i)) \subset st_L(g(v_i))$

$\Rightarrow g(v_i) \in carr(f(x)) \ \forall i$

$\Rightarrow g(x) = \sum \lambda_i g(v_i) \in carr(f(x))$ ∎

OBS: Sem tomar subdivisão baricêntrica, o teorema não é verdade.

Exemplo

triangulação de S^1 com 3-vértices

mas $[S^1, S^1]$ = classes de homotopia de $f: S^1 \to S^1$

é infinito!

$\Rightarrow$ # finito de aplicações simpliciais (determinado pelos vértices)

OBS: Tomando mais subdivisões baricentricas de K, é possível fazer g tão próximo de f quanto se queira, i.e.,

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists\ r > 0$ e aproximação simplicial

$$g : |Sd^{(r)} K| \longrightarrow |L|$$

t.q. $\quad \mathrm{dist}(f(x), g(x)) < \varepsilon \quad \forall x$

~~**OBS:** Dado K, toda classe de homologia pode ser representada por $f_*[P]$ onde $[P]$ é a classe fundamental de uma p.v. fechada orientável (possivelmente redutível)~~

Dívida: Prometi Re-escrever a demonstração do teorema abaixo da última aula

Teorema: Se K é pseudo-variedade, fechada, irredutível de dimensão n, não orientável, então

$$H_n(K) = \{0\}$$

Dem: Sejam $\{\sigma_1, \dots, \sigma_\ell\}$ = n-simplexos de K (Gerador de $C_n(K)$).

~~Seja~~

Suponha que existe $0 \neq z \in C_n(K)$, $\partial z = 0$

$\Rightarrow\ z = a_1\sigma_1 + \dots + a_\ell \sigma_\ell$; $0 = \partial z = \pm(a_i \pm a_j)\underbrace{\tau_{ij}}_{\sigma_i \cap \sigma_j} +$ outros $(n-1)$-simplexos

$\Rightarrow |a_i| = |a_j| \neq 0 \quad \forall i,j$

trocando a orientação de σ_i se necessário, podemos assumir que $a_i > 0 \quad \forall i$

$\Rightarrow \quad \partial z = 0 \iff \partial(\sigma_1 + \dots + \sigma_\ell) = 0$

$\iff$ ~~os~~ n-simplexos estão orientados coerentemente

$\iff K$ é orientável. Absurdo!

$\blacksquare$