Aula 11 (Homologia Simplicial & Pseudo-Variedades)

1

<u>Lembre que</u>: • $C_p(K) = \mathbb{Z}\langle \sigma_\alpha \rangle$ $\quad \sigma_\alpha$ = p-simplexo de K orientado positivamente

• $\partial : C_p(K) \longrightarrow C_{p-1}(K)$

$$\partial [v_0, \dots, v_i, \dots, v_p] = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_p]$$

• $\partial^2 = 0 \implies \operatorname{Im} \partial_{p+1} \subset \ker \partial_p$

• $Z_p(K)$ = grupo de p-ciclos de K $= \ker \partial_p$

• $B_p(K)$ = grupo de p-bordos de K $= \operatorname{Im} \partial_{p+1}$

• $H_p(K) = \dfrac{Z_p(K)}{B_p(K)}$ p-ésimo grupo de homologia de K

<u>Notação / Nomeclatura</u>:

• Se $z \in Z_p(K)$, $[z]$ = classe de Homologia de z

• $[z] = [z'] \iff \exists w \in C_{p+1}(K)$ t.q. $z - z' = \partial w$

$\implies z \sim z'$: z é homólogo à z'. w realiza a homologia

<u>OBS</u>: • $H_p(K)$ só depende do tipo de homotopia de $|K|$

• Se $t : |K| \to X$ é triangulação de X

$$\implies H_p^{simp}(X) := H_p(K)$$

<u>OBS</u>: Em particular, $|K|$ é conexo $\iff$ $|K|$ é conexo por caminhos

<u>Exercício</u>: Mostre que:

(1) $|K|$ é cpto $\iff$ K é finito

(2) $|K|$ é conexo $\iff$ K não é união de dois subcomplexos não vazias disjuntos

(3) $|K|$ é conexo $\iff$ Dados v, w vértices de K (0-simplexos), existe uma sequencia de vértices $v_0, \dots, v_k$ de K tal que $v_0 = v$, $v_k = w$, $(v_i v_{i+1}) \in K$.

Proposição: Seja K um complexo simplicial. Então

$$H_0(K) = \mathbb{Z} \iff |K| \text{ é conexo}$$

OBS: Em geral, $H_0(K) = \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}_{\substack{\#\text{ comp conexas} \\ \text{de } |K|}}$ (Exercício)

Dem: Seja V o conjunto de vértices de K.

Note que:

1) Todo $v \in V$ é um ciclo (pois $\partial v = 0$)

2) Todo $v \in V$ não é bordo:

pois 1-cadeias são da forma $[v_i, v_j]$, $\partial [v_i, v_j] = v_j - v_i$

Então

$$\underbrace{[v, v_1] + [v_1, v_2]}_{\substack{\text{para cancelar} \\ v_1}} + \underbrace{[v_2, v_3]}_{\substack{\text{para} \\ \text{cancelar} \\ v_2}} + \cdots$$

(ou seja, $\partial c \neq 0 \Rightarrow$ sempre aparece pelo menos dois vértices)

$\Rightarrow 0 \neq [v] \in H_0(K)$

3) $|K|$ é conexo $\iff [v] = [w] \quad \forall\, v, w \in V$

Pois $\exists \; v_0, \ldots, v_k$, $v_0 = v$, $v_k = w$, $(v_i, v_{i+1}) \in K$

$$\Rightarrow \partial\big([v_0, v_1] + \cdots + [v_{k-1}, v_k]\big) = v_1 - v_0 + v_2 - v_1 + \cdots + v_k - v_{k-1} = v_k - v_0$$
$$= w - v$$

4) Se $[v]=[w]$ $\forall v,w \in V \Rightarrow |K|$ é conexo:

pois se $|K|$ não é conexo $\Rightarrow \exists w$ t.q. v,w não podem ser ligados por 1-simplexos $\Rightarrow [v] \neq [w]$

Segue que $|K|$ é conexo $\Leftrightarrow$ $\forall z \in C_0(K)$, $z \sim nv$ para algum $n \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{ll} \psi: H_0(K) \longrightarrow \mathbb{Z} & \\ \quad n[v] \longmapsto n & \text{é isomorfismo} \end{array}}$$

∎

• <u>Pseudo-Variedades</u>

<u>Def</u>: Um complexo simplicial K de dimensão n é uma <u>pseudo-variedade irredutível</u> se

(i) K é <u>conexo por n-cadeias</u>:

dado σ e σ' n-simplexos de K, existe uma sequencia ~~~~ de n-simplexos $\sigma_0=\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_\ell=\sigma' \in K$ t.q.

$\sigma_i \cap \sigma_{i+1}$ é ~~~~ $(n-1)$-simplexo de K

(ii) K é <u>homogêneo</u>:

Todo simplexo é face de algum n-simplexo

(iii) Cada $(n-1)$-simplexo é face de exatamente dois n-simplexo

Definição: Um pseudo-variedade de dimensão n é um complexo simplicial que é união de $\underbrace{\text{pseudo-variedades irredutíveis}}_{\substack{\text{componentes conexas por} \\ n\text{-cadeias}}}$ de dim. n.

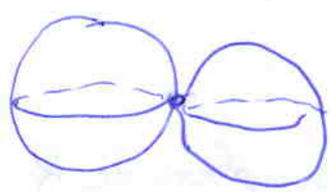
OBS: NÃO TRIVIAL!

1) Toda variedade suave é uma pseudo-variedade

2) Ser pseudo-variedade é uma propriedade topológica, ou seja

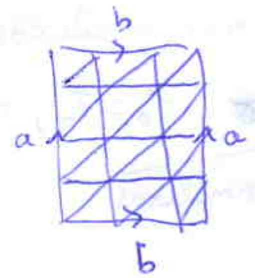
$$K \text{ pseudo-variedade}, \; \underset{\text{homeo}}{|K| \cong |L|} \Rightarrow L \text{ é pseudo-variedade}$$

Exemplos / Não Exemplos



Sim

(2 comp. conexas por n-cadeias)

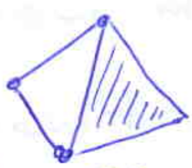


T^2 Sim!

NÃO

Falha 3

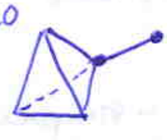
NÃO



Falha 2 & 3

Falha 3

NÃO



Falha 2

OBS: Se K é pseudo-variedade de dim n, e

$$x \in |K| - |K^{(n-2)}| \Rightarrow \exists \underset{x \in}{U} \subset |K| \text{ e homeo}$$

$$\Psi : U \longrightarrow \mathring{D}^n \subset \mathbb{R}^n \quad \left(\begin{array}{c}\text{Localmente} \\ \text{Euclideano}\end{array}\right)$$

ou seja: • Pseudo-variedade é uma "variedade topológica com singularidades de codimensão ≥ 2"

OBS: Nem toda variedade topológica é uma pseudo-variedade (pode não ser nem triangulável)

Exercício: • Mostre que ΣT^2 é pseudo variedade de dimensão 3 (Encontre a triangulação)

~~Mostre que~~

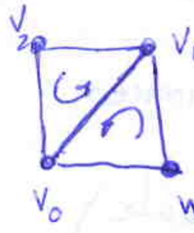
• Mostre que $\Sigma(S^1 \vee S^1)$ é p. var. de dim 2.

Def: Uma pseudo-variedade K ~~[illegible]~~ é fechada se K é finito ($\Leftrightarrow |K|$ é compacto)

• Orientação: Seja K uma p. var. de dim n

Sejam σ, σ' n-simplexos de K, $\sigma \cap \sigma' = \tau \neq \phi$

Def: Uma orientação em σ é coerente com uma orientação em σ' se as orientações induzidas em τ são OPOSTAS.



$\overset{\text{Induz}}{\rightsquigarrow} [v_0, v_1]$

$[v_0, v_1, v_2]$ é coerente com

$[v_0, w_1, v_1] \overset{\text{induz}}{\rightsquigarrow} -[v_0, v_1]$

Def: • Uma orientação em K é uma escolha de orientação em cada n-simplexo de K tal que se $\sigma \cap \sigma' \neq \emptyset \Rightarrow$ as orientações são coerentes.

• K é orientável se for possível escolher uma orientação

• Uma pseudo-variedade orientada é uma p. variedade K com uma escolha de orientação.

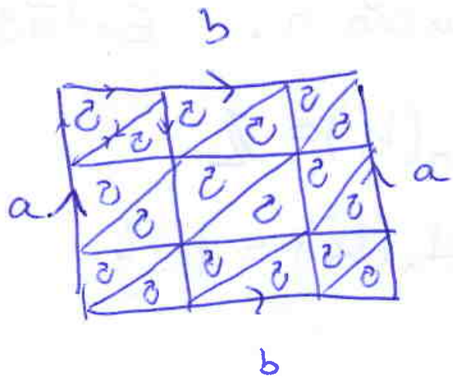
OBS: Se K é orientável e irredutível, a escolha de orientação em UM n-simplexo determina a orientação em K

$\Rightarrow$ Somente 2 escolhas possíveis.

OBS: Ser ou não orientável só depende de $|K|$ e não de K (é topológico) (Vamos ver um argumento p/ isso já, já...

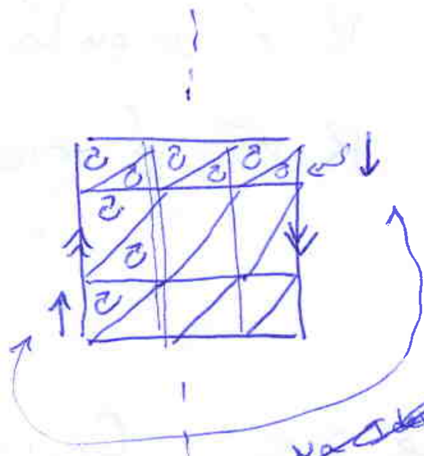
No caso K fechado

Exemplo:



T^2 é orientável

Faixa de Möbius
(Infinita)



~~no~~ Mesmo sentido no queciente!

Não é orientável

• Classe Fundamental

• Seja K pseudo-variedade irredutível, fechada, orientada, de dimensão n

• $\{\sigma_1, \dots, \sigma_k\}$ os n-simplexos de K orientados coerentemente.

Seja $[K] = \sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_k \in C_n(K)$

$\Rightarrow \partial[K] = 0$ (Cada face aparece duas vezes com sinal trocado)

$\quad \parallel$

$\partial\sigma_1 + \partial\sigma_2 + \dots + \partial\sigma_n$

$\Rightarrow [K] \in H_n(K)$ $\quad$ $\boxed{\text{Classe fundamental de } K}$

Teorema: Seja K pseudo-variedade fechada, irredutível, de dimensão n. Então,

① Se K é orientável $\Rightarrow H_n(K) = \mathbb{Z}$

② Se K não é orientável $\Rightarrow H_n(K) = \{0\}$

Dem:

① Note que $C_{n+1}(K) = \{0\}$ $\left(\text{dim. } K = n\right)$

$\Rightarrow H_n(K) = Z_n(K)$ $\left([z] = [z'] \Leftrightarrow z = z'\right)$

Seja $z \in Z_n(K)$ um n-ciclo.

$\Rightarrow z = a_1\sigma_1 + a_2\sigma_2 + \cdots + a_k\sigma_k$

Seja $\tau_{ij} = \sigma_i \cap \sigma_j$ $\left((n-1)\text{- simplexo}\right)$

$\Rightarrow 0 = \partial z = \pm(a_i - a_j)\tau_{ij}$ + Soma envolvendo os outros $(n-1)$-simplexos

$\Rightarrow a_i = a_j \quad \forall ij$

CUIDADO!

$\Rightarrow z = a(\sigma_1 + \sigma_2 + \cdots + \sigma_k) = a[K]$ ∎

② Suponha que $0 \neq z \in Z_n(K)$ é um n-ciclo

$\Rightarrow z = a_1\sigma_1 + \cdots + a_n\sigma_n$. Trocando as orientações de σ_i (se necessário), podemos supor que $a_i \geq 0 \ \forall i$

$\Rightarrow 0 = \partial z = \pm(a_i - a_j)\tau_{ij}$ + outros $(n-1)$-simplexos

$\Rightarrow a_i = a_j \ \forall i,j \underset{(z\neq 0)}{\Rightarrow} a_i > 0 \ \forall i,j$

$\Rightarrow 0 = \partial z = \partial(a\sigma_1 + a\sigma_2 + \dots + a\sigma_n) = a \sum_{i,j} \underbrace{(\tau_{ij} + \tau_{ji})}$

$\Rightarrow \tau_{ij} = -\tau_{ji} \Rightarrow K$ é orientável

τ_{ij} = face $\sigma_i \cap \sigma_j$ com orientação induzida por σ_i.

ABSURDO!

(intuitivamente, algum $(n-1)$-simplexo terá que aparecer duas vezes com o mesmo sinal $\Rightarrow \partial z \neq 0$)

<u>Exercício</u>: (a) Mostre que se K é pseudo-variedade fechada, irredutível e não-orientável de dim. n

$\Rightarrow H_{n-1}(K)$ contém um subgrupo $\cong \mathbb{Z}_2$

(b) Mostre que se K é p. var. irredutível não-compacta de dimensão n (orientável ou não)

$\Rightarrow H_n(K) = \{0\}$

- <u>Pseudo-variedades com bordo</u>

<u>Def</u>: Uma <u>Pseudo-variedade irredutível com bordo</u> de dimensão n é um complexo simplicial K de dim. n, homogêneo e conexo por n-cadeias, e um subcomplexo $\partial K \subset K$ (bordo de K) tal que: (1) Todo $(n-1)$-simplexo de $K - \partial K$ é face de exatamente dois n-simplexos

(2) Todo $(n-1)$-simplexo de ∂K é face de exatamente um n-simplexo

(3) ∂K é pseudo variedade (sem bordo) de dimensão $n-1$

Exemplos: Faixa de Möbius, $S^1 \times I$, $\underbrace{K}_{\substack{\text{p.v} \\ \text{sem bordo}}} - \text{int}(\sigma)$,

- toda variedade suave com bordo
- σ n-simplexo
- $\vdots$
-

Orientação em variedade com bordo:

Igual mas $\sigma \cap \sigma' = \tau \in K - \partial K$ tem que ser orientado coerentemente $\left(\Rightarrow \text{Induz orientação em } \partial K \right)$

~~Proposição~~

Teorema: Se K é irredutível, $\overset{\text{dim. } n}{\checkmark}$ $\partial K \neq \emptyset$ (compacto ~~Fechado~~ ou não, orientável ou não)

$\Rightarrow H_n(K) = \{0\}$

Dem: (Caso $\underbrace{\text{finito}}_{\text{cpto}}$)

$\{\sigma_1, \dots, \sigma_k\}$ n-simplexos de K

$\tau_1, \dots, \tau_\ell$ $(n-1)$-simplexos de ∂K

se $\partial(\underbrace{a_1\sigma_1 + \dots + a_k\sigma_k}_{z}) = 0 \Rightarrow a_1\tau_1 + \dots + a_\ell\tau_\ell = 0 \Rightarrow a_1, \dots, a_\ell = 0$

(se $\ell = k$ acabou. Se não:)

$\Rightarrow z = a_{\ell+1}\sigma_{\ell+1} + \dots + a_k\sigma_k$.

Tem que existir $i \in \{\ell+1, \dots, k\}$, $j \in \{1, \dots, \ell\}$

tal que $\sigma_i \cap \sigma_j$ é um $(n-1)$-simplexo de K

pois K é conexo por n-cadeias

$\partial z = 0 \Rightarrow a_i = 0$ (assuma $i = \ell+1$)

$\Rightarrow z = a_{\ell+2}\sigma_{\ell+2} + \dots + a_k \sigma_k$

repete o argumento .... $\Rightarrow z = 0$

<u>Exercício</u> Faça o caso K infinito