Aula 10 (Complexos Simpliciais)

Def: Um <u>p-simplexo</u> em $\mathbb{R}^N$ é o <u>fecho convexo</u> de $(p+1)$ pontos em <u>posição genérica</u>

- <u>Fecho convexo</u> de $S \subset \mathbb{R}^N$ é o menor conjunto convexo que contém S
- $\{v_0, \dots, v_p\}$ está em <u>posição genérica</u> se $\{v_1 - v_0, \dots, v_p - v_0\}$ é L.I.
- Notação: $(v_0, \dots, v_p)$ = p-simplexo com <u>vértice</u> v_i $(i = 0, \dots, p)$

<u>Exemplos</u>: (simplexo padrão) $v_i = e_i = (0, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ (i)

$p = 0$, $\Delta^0 = \{pt\}$ $\quad$ $v_1 = e_1 = (1, 0, \dots, 0)$

$e_2 = (0, 1, \dots)$

$p = 1$, $\Delta^1 = (e_1, e_2)$

$p = 2$, $\Delta^2 = (e_1, e_2, e_3)$

(OBS: Todo p-simplexo pode ser identificado com Δ^p)

$p = 3$, $\Delta^3 =$

} são faces de σ

(ver coord. baricentricas)

$\vdots$

Def: Se σ é simplexo, uma face de σ é um simplexo τ, tal que vért. de $\tau \subseteq$ vert. de σ

Escrevemos $\tau \leq \sigma$ (τ é face de σ)

OBS: $\sigma \leq \sigma$. Se $\tau \leq \sigma$, $\tau \neq \sigma \Rightarrow \tau$ é face própria de σ

- $\partial\sigma$ = bordo de $\sigma = \{\tau \leq \sigma \mid \tau \neq \sigma\}$
- $\mathring{\sigma} = \sigma - \partial\sigma$ = interior de σ
- Se $x \in (v_0, \dots, v_p) \Rightarrow x = \sum_{i=0}^{p} \lambda_i v_i$, $0 \leq \lambda_i \leq 1$, $\sum_{i=0}^{p} \lambda_i = 1$

→ $(\lambda_0, \dots, \lambda_p)$ são as coordenadas baricêntricas de x.

→ O baricentro de σ é o ponto com coordenadas

$$\left(\frac{1}{p+1}, \frac{1}{p+1}, \dots, \frac{1}{p+1}\right)$$

→ Identificação: $(v_0, \dots, v_p) \longrightarrow \Delta^p$
$\qquad\qquad \sum \lambda_i t_i \longmapsto \sum \lambda_i e_i = (\lambda_0, \dots, \lambda_p)$

depende só da escolha da ordem nos vértices

Def: Um <u>complexo simplicial</u> K é um conjunto de simplexos em $\mathbb{R}^N$ tal que

(1) $\sigma \in K$, $\tau \leq \sigma \Rightarrow \tau \in K$

(2) $\sigma, \tau \in K \Rightarrow \sigma \cap \tau = \phi$ ou $\sigma \cap \tau \leq \sigma, \tau$ (é face de σ e de τ)

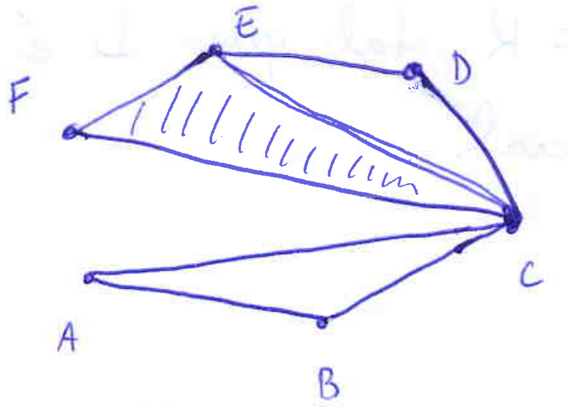
(3) Todo $\sigma \in K$ é face de um número finito de simplexos de K

OBS:
- ϕ é um simplexo de dim p $\forall p$
- Se K tem simplexos de dim arbitrária tomamos $K \subset \mathbb{R}^\infty = \{(x_1, x_2, \dots) \mid x_i = 0$ para quase todo $i\}$

com topologia $A \subset \mathbb{R}^\infty$ é aberto $\Leftrightarrow$ $A \cap \mathbb{R}^n$ é aberto $\forall n$. $\left(\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^\infty = \{(x_1, \dots, x_n, 0, 0, \dots)\}\right)$

Exemplos & Não Exemplos

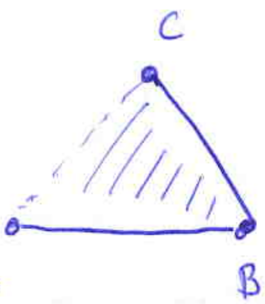
1)



$K_\bullet = \{(A), (B), (C), (A,B), (A,C), (B,C), (D), (E), (F), (C,D), (D,E), (E,F), (F,C), (C,E,F)\}$

é um complexo simplicial

2)

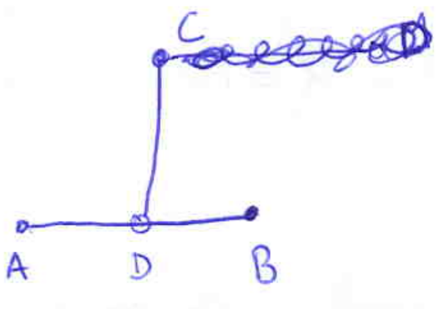


$K_\bullet = \{(A), (B), (C), (A,B), (B,C), (A,B,C)\}$

Não é complexo simplicial

(falha 1)

3)

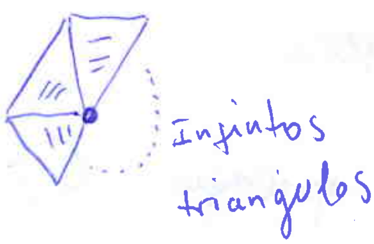


$K_\bullet = \{(A), (B), (C), (A,B), (C,D)\}$

Não é cplx simplicial

(Falha 2)

4)



Não é cplx simplicial

(falha 3)

Def: Um subcomplexo simplicial L ~~de~~ de K é um subconjunto $L \subset K$ tal que L é um complexo simplicial.

Exemplo (importante):

o p-esqueleto de K

$$K^{(p)} = \{\sigma \in K \mid \sigma \text{ é } q\text{-simplexo}, \ q \leq p\}$$

é um sub-complexo simplicial. Temos

$$K^{(0)} \subset K^{(1)} \subset \cdots \subset K^{(p)} \subset \cdots$$

OBS: • Dizemos que K tem dimensão p se

$$K^{(p-1)} \neq K, \quad K^{(p)} = K.$$

• se $K^{(p)} \neq K \quad \forall p \Rightarrow \dim K = \infty$

Def: O suporte de K (ou a realização geométrica de K)

é o espaço topológico

$$|K| = \bigcup_{\sigma \in K} \sigma \quad \text{com topologia } A \subset |K| \text{ é aberto} \iff A \cap \sigma \text{ é aberto } \forall \sigma$$

Exercício: Mostre que se K é finito $\Rightarrow |K| \subset \mathbb{R}^N$ é mergulho.

Def: Seja X um espaço topológico. Uma triangulação (ou estrutura simplicial) em X é um complexo simplicial K e um homeomorfismo

$$t: |K| \longrightarrow X$$

- Se existir triangulação, dizemos que X é triangulável (ou um poliédro)
- Se existir $\Rightarrow$ NÃO É ÚNICA

OBS: • Toda variedade suave é triangulável.
- Nem toda variedade topológica é triangulável
- Existe uma 4-variedade topológica compacta h.e. à $\mathbb{C}P^2$ que não é triangulável

  suave!

  (ou seja, ser triangulável não é invariante por equiv. de homotopia).

Estes resultados são difíceis de Provar!

Exemplos:

1) Seja σ um p-simplexo.

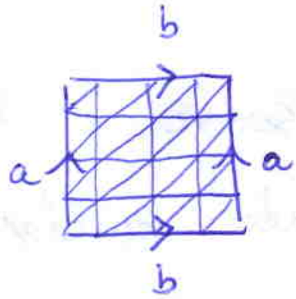
$K = \{\tau \mid \tau \leq \sigma\}$ é um complexo simplicial

e $|K| \cong D^n \Rightarrow D^n$ é triangulável

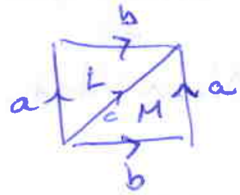
2) $K' = \{\tau \mid \tau \leq \sigma,\ \tau \neq \sigma\} = \partial\sigma$ é um complexo

e $|K'| \cong S^{n-1} \Rightarrow S^{n-1}$ é triangulável

3) Triangulação no Torus



(OBS: Isto Não funciona:



$(*)$

pois $L \cap M = \{a, b, c\}$

Não é um 1-simplexo (uma face)

OBS:

A menor triangulação do Torus tem 14 triangulos.

Tente encontrar uma!

Exercício: ~~Exiba~~ encontre triangulações em $\mathbb{RP}^2$, $T\#T$, K, M, $Cil(S^1)$.

(*) é um exemplo de um $\underline{\Delta\text{-complexo}}$

Def: Uma estrutura de Δ-complexo em X é uma coleção

$$S = \{ \sigma_\alpha : \Delta^n \longrightarrow X \} \qquad (n = n(\alpha))$$

tal que

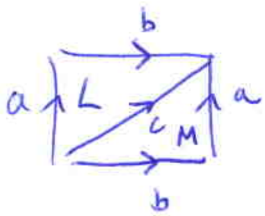
(i) $\sigma_\alpha|_{\mathring{\Delta}^n}$ é injetor e $\forall x \in X$, $\exists\, \alpha$ tal que

$$x \in \operatorname{Im} \sigma_\alpha|_{\mathring{\Delta}^n}$$

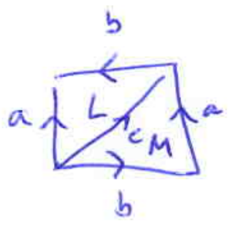
(ii) Se $\Delta_i^{n-1} = (e_0, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_n)$ é uma face de Δ^n $\Rightarrow$ $\sigma_\beta = \sigma_\alpha|_{\Delta_i^{n-1}} \in S$

(iii) $A \subset X$ é aberto $\Longleftrightarrow$ $\sigma_\alpha^{-1}(A) \subset \Delta^n$ é aberto $\forall \alpha$

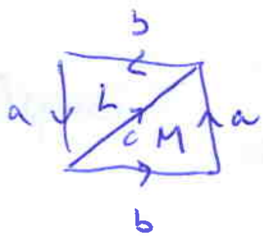
Exemplos:



T^2



K



$\mathbb{P}^2$

Exercício: Mostre que um Δ-complexo é uma triangulação

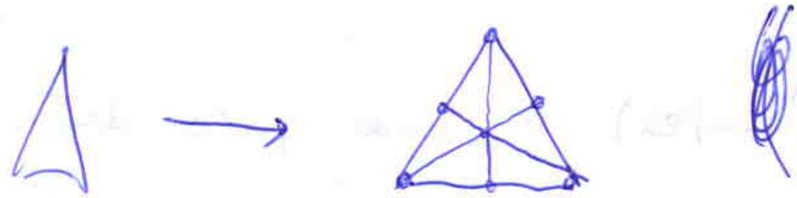
$\Longleftrightarrow$ (i) Cada p-simplexo de X ($\operatorname{Im} \sigma_\alpha$) tem $p+1$ vértices distintos

(ii) Nenhum outro simplexo de X tem o mesmo conjunto de vértices

OBS:

	Δ-complexo	Complexo Simplicial
Vantagem	Mais fácil de encontrar	Totalmente Combinatório
Desvantagem	Menos combinatório	Difícil de encontrar

OBS: Sub-divisão baricêntrica



(incluir os baricentros como novos vértices)

Exercício (23, p. 133 Hatcher):

Δ-complexo $\xrightarrow[\text{baricêntrica}]{\text{subdivisão}}$ Δ-complexo satisfazendo (i)

$\xrightarrow[\text{baricêntrica}]{\text{subdivisão}}$ Triangulação

- Simplexos Orientados:

  - Um 0-simplexo orientado é um par (σ, ε) onde σ é um 0-simplexo $\sigma = (v)$ e $\varepsilon = \pm 1$

• Se $p>0$, uma orientação em

$$\sigma = (v_0, \ldots, v_p)$$

é uma escolha de uma classe de equivalência na ordem dos vértices de σ, onde duas ordens são equivalentes se diferem por uma permutação par

$$(v_0, \ldots, v_p) \sim (v_1, v_2, v_0, \ldots, v_p) \not\sim (v_1, v_0, \ldots, v_p)$$

Notação: $[v_0, \ldots, v_p] = (v_0, \ldots, v_p)$, $v_0 < v_1 < \cdots < v_p$

$$-[v_0, \ldots, v_p] = (v_1, v_0, v_2, \ldots, v_p)$$

• Orientação Induzida:

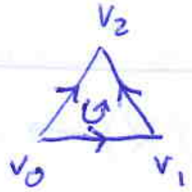
Se $\sigma = [v_0, \ldots, v_p] \Rightarrow \sigma$ induz uma orientação em $\tau = (v_0, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_p)$

(diferente da orientação de τ)

Orientação induzida

$$\tau = (-1)^i [v_0, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_p]$$

Exemplo:



$$[v_0, v_1, v_2] \begin{matrix} \nearrow & [v_0, v_1] \\ \rightarrow & [v_1, v_2] \\ \searrow & -[v_0, v_2] \end{matrix}$$

- O complexo de cadeias simplicial

Seja K um complexo simplicial

- $\overline{C}_p(K)$ = grupo abeliano livre gerado pelos p-simplexos orientados de K

$= \left\{ \sum_\sigma n_\sigma \sigma \;\middle|\; \sigma \text{ é p-simplexo orientado},\ n_\sigma \in \mathbb{Z},\ n_\sigma = 0 \text{ q.s} \right\}$

- $C_p(K) = \overline{C}_p(K)/\sim$ onde $(-1)\cdot\sigma = \underbrace{-\sigma}_{\sigma \text{ com orientação trocada}}$

= grupo abeliano livre gerado pelos p-simplexos orientados positivamente.

$\boxed{C_p(K) \text{ é o grupo de cadeias simpliciais de } K}$

- Homomorfismo de bordo

$\partial = \partial_p : C_p(K) \longrightarrow C_{p-1}(K)$

$$\partial_p [v_0, \ldots, v_p] = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i [v_0, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_p]$$

$\boxed{(C_\bullet(K), \partial) \text{ é o complexo de cadeias simpliciais de } K}$

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{p+2}} C_{p+1}(K) \xrightarrow{\partial_{p+1}} C_p(K) \xrightarrow{\partial_p} C_{p-1}(K) \longrightarrow \cdots \xrightarrow{\partial_1} C_0(K) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

Lema: $\partial_p \circ \partial_{p+1} = 0 \qquad (\partial^2 = 0)$

Dem:

$$\partial_p \circ \partial_{p+1}([v_0,\dots,v_{p+1}]) = \partial_p\left(\sum_{i=0}^{p+1}(-1)^i [v_0,\dots,\hat{v}_i,\dots,v_{p+1}]\right)$$

$$= \sum_{i=0}^{p+1}\left((-1)^i\left(\sum_{j<i}(-1)^j [v_0,\dots,\hat{v}_j,\dots,\hat{v}_i,\dots,v_{p+1}] + \sum_{j>i}(-1)^{j-1}[v_0,\dots,\hat{v}_i,\dots,\hat{v}_j,\dots\right.\right.$$

$$= 0$$

Ou seja:

$$\operatorname{Im} \partial_{p+1} \subset \operatorname{Ker} \partial_p$$

Homologia Simplicial de K:

- $Z_p(K) = \operatorname{Ker} \partial_p \subset C_p(K)$
- $B_p(K) = \operatorname{Im} \partial_{p+1} \subset C_p(K)$
- $H_p(K) = \dfrac{Z_p(K)}{B_p(K)}$

OBS: $H_p(K)$ só depende (do tipo de homotopia) de $|K|$. (Vamos ver isso depois). Se $t: |K| \to X$ é triang.

$$\Rightarrow \boxed{H_p^{simp}(X) := H_p(K)}$$