Top. Alg. Aula 0: Introdução

Problema Central da Topologia:

Dados espaços topológicos X & Y, quando eles são homeomorfos?

ou seja:

Quando existe

def $\because$ Homeomorfismo

$f: X \longrightarrow Y$ bijeção contínua tal que $f^{-1}: Y \longrightarrow X$ é contínuo?

Em geral esse problema é muito difícil! Mas as vezes é possível escrever homeomorfismos explícitos (mas ~~nem sempre~~ mesmo em casos "fáceis" pode se difícil encontrar formulas explícitas)

e.g.

Exemplo / Exercício: Encontre homeomorfismos explícitos entre

a) $S^2 - \{N\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1\} - \{(0,0,1)\}$ e $\mathbb{R}^2$

b) $\mathbb{C}P^1 \cong S^2$ onde $\mathbb{C}P^1 = \mathbb{C}^2 - \{0\}/\sim$ $\quad (z_0, z_1) \sim (z_0', z_1') \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$ t.q. $z_0 = \lambda z_0'$, $z_1 = \lambda z_1'$

c)

~~OBS: Na hora de provar que f: X → X é hom~~

Problema Simplificado :

Dados X, Y: Eles são homotópicamente equivalentes?

(Podem ser "deformados um no outro")

OBS: Homeomorfismo $\Longrightarrow$ Equivalencia de Homotopia

Equivalencia de Homotopia:

$$X \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} Y$$

$f \circ g \sim Id_Y$ || homotópico (pode ser deformado)
$g \circ f \sim Id_X$

Exemplo: Classificação das Letras

A B C D E F G H I J L M N O P Q R S T U V X Z

Homeomorfos: (9 classes)

$\{A, R\}_1$, $\{B\}_2$, $\{C, G, I, L, M, N, S, U, V\}_3$

$\{D, O\}_4$, $\{E, F, T, J\}_5$, $\{H\}_6$, $\{P\}_7$, $\{Q\}_8$, $\{X, Z\}_9$

Equiv. de Homotopia: (3 classes)

$\{A, D, O, R, P\}$, $\{B, Q\}$, $\{C, G, I, L, M, N, E, F, T, S, U, V, H, X, Z\}$

Invariante Mais Simples de Homeomorfismo

Conexidade (conexo ou conexo por caminhos)

Lembre que:

- X é <u>conexo</u> se $\forall$ aberto $A, B \subset X$, tal que $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = X \Rightarrow A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$
- X é conexo por caminhos se $\forall x, y \in X$, $\exists \gamma : I \to X$ cont. tal que $\gamma(0) = x$ & $\gamma(1) = y$

Exercícios:

2) Mostre que se $X \overset{\text{homeo}}{\cong} Y$, X conexo (conexo por caminhos)

$\Rightarrow$ Y conexo (por caminhos)

3) Mostre que conexo por caminhos $\Rightarrow$ conexo.

Vale a recíproca?

~~4) Mostre que as classes de homeomorfismo da~~

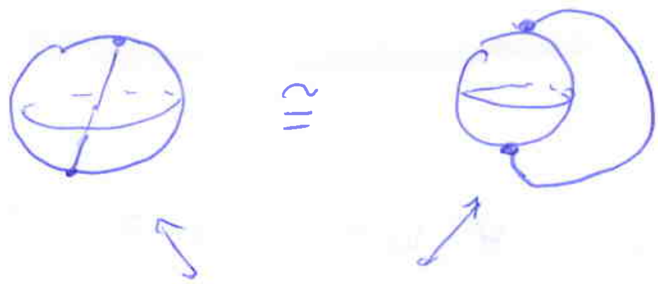
4) Demonstre a classificação por homeo. das letras

- Duas letras na mesma classe são homeomorfas
- Duas letras em classes distintas não são homeomorfas

OBS: Dois truques muito úteis

I) Compare seu espaço com um "espaço abstrato"

e.g.,



$$S^2 \amalg I/\sim \qquad \{N\}\sim\{0\},\ \{S\}\sim\{1\}$$

Truque II (Remova um ponto)

~~Se $X \cong Y$ (homeo) $\Rightarrow$~~

Se

$$f : X \to Y \text{ é homeo}$$

$$\Rightarrow \quad f : X - \{x_0\} \to Y - \{f(x_0)\} \text{ é homeo}$$

Exemplo:

$P \not\cong O$ pois  tem duas componentes conexas

&  é conexo $\forall\, o \in O$

Topologia Algébrica:

Ideia Geral:

Associar um objeto algébrica à cada ~~de~~ espaço topológico de maneira <u>functorial</u>

Def: Uma <u>categoria</u> é composta por duas classes:

$ob(C)$ = Objetos de C

$Mor(C)$ = Morfismos de C

Onde cada elemento

$f \in Mor(C)$ é uma seta (função)

$$f: a \in Ob(C) \longrightarrow b \in Ob(C)$$

e uma composição

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & b \arrow[r, "g"] & c \end{tikzcd}$$

tal que:

1) $\forall a \in Ob(C)$, $\exists$ $Id_a : a \to a$ t.q.

$$Id_a \circ f = f \qquad \forall f : b \to a$$

$$g \circ Id_a = g \qquad \forall g : a \longrightarrow b$$

2) Associativo:

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

Exemplos:

1) Top : Objetos $\equiv$ Espaços Topológicos
Morfismos $\equiv$ Aplicações Contínuas

2) Set : Objetos $\equiv$ Conjuntos
Morfismos $\equiv$ funções

3) Grp : Objetos $\equiv$ Grupos
Morfismos $\equiv$ Homomorfismos

Um Functor é uma "aplicação entre categorias"

$$F: Ob(C) \longrightarrow Ob(D)$$

$$F: Mor(C) \longrightarrow Mor(D)$$

Covariante

tal que $F(Id_a) = Id_{F(a)}$, $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$

OBS:

Em geral:

Se $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ é functor e

$$a \cong b \text{ em } \mathcal{C} \Rightarrow F(a) \cong F(b) \text{ em } \mathcal{D}$$

Pois

$$\left.\begin{array}{l} f : a \to b \\ f^{-1} : b \to a \\ f \circ f^{-1} = Id \\ f^{-1} \circ f = Id \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} F(f) : F(a) \to F(b) \\ F(f^{-1}) : F(b) \to F(a) \end{array}$$

$$F(f \circ f^{-1}) = F(f) \circ F(f^{-1})$$
$$\|$$
$$F(Id) = Id$$

$$Id = F(Id) = F(f^{-1} \circ f) = F(f^{-1}) \circ F(f)$$

Estratégia da Topologia Algébrica:

Procurar um functor

$$F : TOP \to \mathcal{C}$$

onde $\mathcal{C}$ é uma categoria para a qual é mais fácil reconhecer isomorfismos

Exemplos:

1) $\mathcal{F}: \mathrm{Top} \longrightarrow \mathrm{Set}$

$$\mathcal{F}(X) = \{\text{componentens conexas por caminhos de } X\} = \pi_0(X)$$

Se $f: X \to Y$ e $C \subset X$ é uma comp. conexa por caminhos

$\Rightarrow f(C) \subset \tilde{C}$ onde $\tilde{C}$ é componente conexa por caminhos de Y

(Exercício 5)

$\rightarrow \quad \mathcal{F}(f)C = \tilde{C}$

OBS: Em Set dois objetos (conjuntos) são isomorfos $\Leftrightarrow$ tem mesma cardinalidade

cat. dos esp. top. ~~com um ponto~~ pontuados

Logo,

comp. conexas por caminhos X $\neq$ # comp. con. por cam. de Y

$\Rightarrow X \not\cong Y$

2) $\mathcal{F}: \mathrm{Top}^* \longrightarrow \mathrm{Grp}$

$$(X,x) \longmapsto \pi_1(X,x)$$

Ideia intuitiva de $\pi_1(X,x)$:

Elementos: Classes de homotopia de caminhos

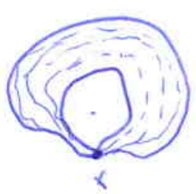
$\gamma: I \longrightarrow X, \quad \gamma(0) = \gamma(1) = x$

$[\gamma_0] = [\gamma_1] \Leftrightarrow \exists \; H: I \times I \longrightarrow X$

t.q. $H_0(t) = \gamma_0(t)$

$H_1(t) = \gamma_1(t)$

$H_s(0) = H_s(1) = x$



Produto:

$$[\gamma]\cdot[\beta] = [\gamma * \beta]$$

onde $\gamma * \beta$ = concatenação = $\begin{cases} \beta(2t) & 0 \leq t \leq 1/2 \\ \gamma(2t-1) & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$

Inversa:

$[\gamma]^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} [\bar{\gamma}]$ onde $\bar{\gamma}(t) = \gamma(1-t)$

Identidade:

$[c_x]$ onde $c_x(t) = x \quad \forall t$

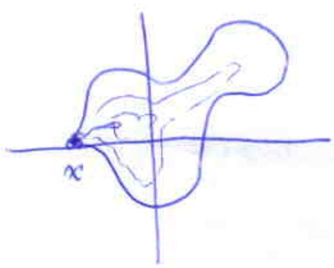
O que $\pi_1(X,x)$ mede?

"Buracos" de X

Exemplos:

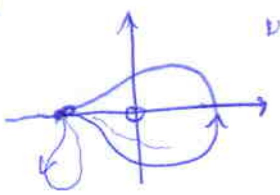
1) $X = \mathbb{R}^2$

$$\pi_1(\mathbb{R}^2, x) \cong \{1\}$$



2) $\mathbb{R}^2 - \{0\}$

$$\pi_1(\mathbb{R}^2 - \{0\}, x) \cong \mathbb{Z}$$



Uma volta anti-horário, 2 voltas anti-horário, ...

1 volta horário, ...

OBS:

$\pi_1(X,x)$ também é uma medida de Conexidade:

Seja

$$\underbrace{\Omega(X,x)}_{\text{Espaço de Laços em } X} = \{ \gamma : I \longrightarrow X \mid \gamma(0) = \gamma(1) = x \}$$

- $\Omega(X,x)$ é um espaço topológico com a topologia compacto-aberto

Sub-Base: $U(K,V) = \{ \gamma \in \Omega(X,x) \mid \gamma(K) \subset V \}$

(Menor top. que contém)

compacto aberto

- Se X é "razoável" $\Rightarrow$ Componentes conexas por caminhos em $\Omega(X,x)$

$\Updownarrow$

Classes de homotopia de caminhos em X

ou seja

- $\pi_0(\Omega(X,x)) \text{ "=" } \pi_1(X,x)$

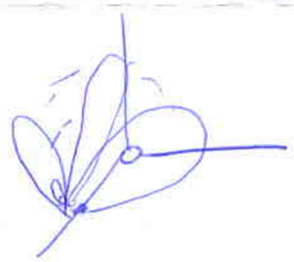
Vantagens de $\pi_1(X,x)$:

- Intuitivo
- Computável → Teoria de Recobrimentos
  → Teorema de Seifert - van Kampen
- Respeita Produtos $\quad \pi_1(X\times Y, (x,y)) \cong \pi_1(X,x) \times \pi_1(Y,y)$

Problemas: Não enxerga buracos de codimensão alta:

Exemplos:

$$\pi_1(\mathbb{R}^n - \{0\}, x) = \{1\} \quad \forall n \geq 3$$



Solução:

1) Considerar $\pi_k(X,x) = \pi_{k-1}(\Omega(X,x), c_x)$

Muito difícil de calcular!

Ex: $\pi_k(S^n, x) = ?$ para $k >> n$

2) $H_k(X)$ homologia

Vantagem: Calculável

Desvantagem: Menos intuitivo

Plano do Curso

1) Homotopia & Equivalencia de Homotopia
2) Grupo Fundamental, Recobrimentos, Teorema de Van Kampen
3) Homologia Simplicial, Pseudo-Variedades
4) Homologia Singular
5) Homologia Celular & Complexos CW
6) Cohomologia: Definição & Teorema dos Coef. Universais

Pelo caminho vamos ver:

- Teorema da Bola Peluda
- Teorema da Curva de Jordan
- Teorema do Ponto Fixo de Brouwer
- Teorema do Ponto Fixo de Lefschetz

e

⋮