Topologia e Geometria – Lista 5

Nome: ________________________________
Número USP: ____________________________

Curso: ________________________________

Resolva os seguintes exercícios. <u>Justifique todas as suas respostas</u>. Não é permitido usar o fato que o número de Euler é um invariante topológico. É permitido consultar livros e as notas de aulas impressas, mas NÃO as listas de exercícios resolvidas. Não se esqueça de por o nome e número USP em TODAS as folhas da prova. Boa prova!

1. (a) Mostre que existe um recobrimento do Torus $\mathbb{T}^2$ na garrafa de Klein K.
   (b) Mostre que K pode ser obtido de $\mathbb{R}^2$ como quociente por uma ação propriamente descontnua de um grupo.
   (c) Calcule o grupo fundamental de K.

2. Utilizando o fato que toda variedade suave compacta é um complexo-CW, mostre que toda variedade suave compacta tem grupo fundamental finitamente gerado.

3. Sejam M_1 e M_2 duas variedades de dimensão n. Mostre que se $n \geq 3$, então

$$\pi_1(M_1 \# M_2, [x]) \simeq \pi_1(M_1, x) * \pi_1(M_2, y).$$

   O que se pode dizer quando $n = 2$?

4. Seja

$$\mathbb{CP}^n = \{\ell \subset \mathbb{C}^{n+1} : \ell \text{ é um subespaço com } \dim_{\mathbb{C}} \ell = 1\},$$

   ou seja, $\mathbb{CP}^n$, o espaço projetivo complexo, é o espaço das retas complexas (dimensão real 2) de $\mathbb{C}^n$.
   (a) Mostre que $\mathbb{CP}^n = (\mathbb{C}^{n+1} - \{0\})/\sim$, onde $(z_0, \ldots, z_n) \sim (z'_0, \ldots, z'_n)$ se e somente se existe $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$ tal que $(z_0, \ldots, z_n) = (\lambda z'_0, \ldots, \lambda z'_n)$.
   (b) Mostre que $\mathbb{CP}^n$ é homeomorfo a um quociente de $\mathbb{S}^{2n+1}$ por uma ação de $\mathbb{S}^1$.
   (c) Mostre que $\mathbb{CP}^n$ é uma variedade topológica de dimensão $2n$.
   (d) Mostre que $\mathbb{CP}^1 \simeq \mathbb{S}^2$.
   (e) Mostre que $\mathbb{CP}^n$ é obtido de $\mathbb{CP}^{n-1}$ colando uma $2n$-célula.
   (f) Conclua que $\mathbb{CP}^n$ é simplesmente conexo para todo n.

5. Calcule o grupo fundamental dos seguintes espaços:

   (a) $X = \mathbb{R}^3 - \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0, \text{ or } y = 0, \text{ or } z = 0\}$, i.e., o espaço obtido removendo os três eixos de $\mathbb{R}^3$.

   (b) O espaço projetivo real de dimensão 3

   $$\mathbb{P}^3 = \{l \subset \mathbb{R}^4 : l \text{ é uma reta pela origem}\}.$$

   (c) O produto wedge de dois Tori (figura 1).

Figura 1: $\mathbb{T} \vee \mathbb{T}$.

   (d) O espaço X que consiste de uma esfera, uma haste (1-dimensional) que passa pelos polos norte e sul da esfera e conecta em um cilindro, conforme indicado na figura 2.

Figura 2: Exercise 5(d)

   (e) O espaço quociente obtido identificando os vértices de um quadrado, i.e., $[0, 1] \times [0, 1]/A$, onde

   $$A = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}.$$

   (f) Uma corrente de quatro círculos, obtido de quatro cópias de $\mathbb{S}^1$ e identificando elas dois a dois conforme a figura 3.

Figura 3: Corrente de 4 círculos.

(g) O colar de pérolas com cordão, i.e., o colar de n pérolas da lista de exercícios anterior junto com um $\mathbb{S}^1$ que passa por dentro das esferas intersectando cada esfera exatamente nos pontos que são usados para colar uma esfera na outra. De forma mais abstrata, se o colar de pérolas é descrito como o espaço X obtido de n esferas ($n \geq 3$), $\mathbb{S}^2_1, \ldots, \mathbb{S}^2_n$, tomando dois pontos distintos p_i e q_i em cada uma delas identificando $p_i \in \mathbb{S}^2_i$ com um de $q_{i+1} \in \mathbb{S}^2_{i+1}$ (para $i < n$), e $p_n \in \mathbb{S}^2_n$ com $q_1 \in \mathbb{S}^2_1$ (figura 4), então o colar de pérolas com cordão é

$$(X \sqcup \mathbb{S}^1)/\sim,$$

onde $[p_k] \in X \sim e^{\frac{2k\pi i}{n}} \in \mathbb{S}^1$, com $k = 1, \ldots, n$.

Figura 4: Colar de Pérolas.

6. Mostre que existe um homomorfismo injetor $\pi(\mathbb{T}_{11}, x) \to \pi(\mathbb{T}_3, p)$, onde $\mathbb{T}_g$ a soma conexa de g Tori. (DICA: considere $\mathbb{T}_{11}$ como na figura 5).

Figura 5: $\mathbb{T}_{11}$.

7. Mostre que o espaço obtido de n triângulos por identificações na fronteira através de um esquema de etiquetagem é uma superfície se e somente se o esquema de etiquetagem é próprio.

8. Seja X um espaço topológico. A suspensão de X é definida por

$$\Sigma X = (X \times [-1, 1]) / \sim,$$

onde $\sim$ é a menor relação de equivalência tal que $(x, 1) \sim (y, 1)$, e $(x, 0) \sim (y, 0)$ para todo $x, y \in X$. (Este espaço também é chamado de cone duplo sobre X)

   (a) Mostre $\Sigma\mathbb{S}^n \simeq \mathbb{S}^{n+1}$ para todo $n \geq 0$.

   (b) Mostre que se X é conexo por arcos, então ΣX é simplesmente conexo.

   (c) Mais geralmente, qual a relação entre o número de componentes conexas por arcos de X e $\pi_1(\Sigma X, x)$?

9. Para cada um dos grupos abaixo, dê um exemplo de um espaço topológico que tenha esse grupo como seu grupo fundamental:

   (a) $\mathbb{Z}_3$

   (b) $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_3$

   (c) $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_3$

   (d) D_4 (O grupo diedral de simetrias de um quadrado)

   (e) $\mathbb{Z}_2 \ltimes \mathbb{Z}$ (o produto semi direto pela ação de $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ em $\mathbb{Z}$, $\epsilon \cdot n = (-1)^\epsilon n$.

   (f) $G =< S|R >$, onde S é um conjunto finito, e $R \subset F(S)$ também é um conjunto finito.

10. Considere o espaço de Banach

$$\ell^2 = \{(x_k)_{k \in \mathbb{N}} : \sum x_k^2 < \infty\}$$

o espaço das sequências de números reais cuja soma dos quadrados converge, munido da norma

$$||(x_k)|| = \left(\sum x_k^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

(a) Mostre que $\mathbb{S}(\ell^2) = \{u \in \ell^2 : ||u|| = 1\}$ é contrátil (DICA: Considere o operador $T : \ell^2 \to \ell^2$ dado por

$$T(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (0, x_1, x_2, x_3, \ldots).$$

Mostre que T é homotópico à identidade e à uma aplicação constante).

(b) Calcule o grupo fundamental de $\mathbb{P}(\ell^2) = \{l \subset \ell^2 : l \text{ é uma reta pela origem.}\}$ (com sua topologia natural).

(c) Mostre que se $f : \ell^2 \to \mathbb{R}^2$ é contínua e ímpar, então existe $u \in \ell^2$ tal que $f(u) = 0$.

11. Considere os seguintes grupos clássicos:

$$GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R}) : \det A \neq 0\}$$

$$GL^+(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R}) : \det A > 0\}$$

$$O(n, \mathbb{R}) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) :< Au, Av >=< u, v >\}$$

$$SO(n, \mathbb{R}) = \{A \in O(n, \mathbb{R}) : \det A = 1\}$$

$$U(n) = \{A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C}) :<< Au, Av >>=<< u, v >>\}$$

$$SU(n) = \{A \in U(n) : \det A = 1\},$$

onde $< \ , \ >$ denota o produto escalar usual de $\mathbb{R}^n$, e $<< \ , \ >>$ denota o produto escalar hermiteano usual de $\mathbb{C}^n$.

Mostre que:

(a) $O(n, \mathbb{R})$ é homotopicamente equivalente à $GL(n, \mathbb{R})$. DICA: pense no processo de ortogonalização de Gram-Schmidt.

(b) $SO(n, \mathbb{R})$ é homotopicamente equivalente à $GL^+(n, \mathbb{R})$.

(c) $SO(n, \mathbb{R})$ é compacto, mas $GL^+(n, \mathbb{R})$ não é compacto.

(d) $SU(2)$ é homeomorfo à $\mathbb{S}^3$ e portanto é simplesmente conexo.

(e) $\mathbb{S}^3$ admite 3 campos de vetores X_1, X_2, X_3 que são linearmente independentes em todos os pontos.

(f) Existe um recobrimento de $SU(2)$ em $SO(3)$. Calcule o grupo fundamental de $SO(3)$.

(g) $U(n)$ é conexo por arcos, mas $O(n, \mathbb{R})$ não é conexo.

12. Existe alguma ação propriamente descontínua, com quociente compacto, de $\mathbb{Z}_2$ em $\mathbb{R}^2$?