Topologia e Geometria – Lista de Exercícios 4

Resolva os seguintes exercícios. Justifique suas respostas. Os exercícios 5, 7, e 10 deverão ser entregues até o fim da aula na quarta-feira dia 23-10-2013

1. (a) Mostre que existe um recobrimento do Torus $\mathbb{T}^2$ na garrafa de Klein K.
   (b) Mostre que K pode ser obtido de $\mathbb{R}^2$ como quociente por uma ação propriamente descontnua de um grupo.
   (c) Calcule o grupo fundamental de K.
2. Mostre que um recobrimento conexo $P : E \to B$ de um espaço simplesmente conexo B é um homeomorfismo.
3. Mostre que se $\tilde{B}$ é um recobrimento simplesmente conexo de um espaço B, e se E é um recobrimento (conexo) qualquer de B, então existe um recobrimento $p : \tilde{B} \to E$.
4. A esfera $\mathbb{S}^n$ pode ser obtida de $\mathbb{R}^n$ como quociente por uma ação propriamente descontínua de um grupo G? E o espaço projetivo real $\mathbb{P}^n$?
5. Seja $f_n : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ o recobrimento de n folhas $f_n(z) = z^n$. Decida para quais valores de m e n existe um levantamento de $f_m : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ para o recobrimento f_n (veja o diagrama abaixo).

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{S}^1 \arrow[d, "f_n"] \\ \mathbb{S}^1 \arrow[ur] \arrow[r, "f_m"'] & \mathbb{S}^1 \end{tikzcd}$$

6. Seja M uma variedade topológica de dimensão n.
   (a) Mostre que se G age propriamente descontinuamente em M, então M/G é uma variedade topológica de dimensão n.
   (b) Mostre que se $p : E \to M$ é um recobrimento, então E é variedade topológica de dimensão n.
7. Encontre um recobrimento simplesmente conexo, e calcule o grupo fundamental dos seguntes espaços.
   (a) $X = K$, a Garrafa de Klein.
   (b) $X =$ colar de n pérolas (figura 1). Aqui X é o espaço obtido de n esferas ($n \geq 3$), $\mathbb{S}^2_1, \ldots, \mathbb{S}^2_n$, tomando dois pontos distintos p_i e q_i em cada uma delas identificando $p_i \in \mathbb{S}^2_i$ com um de $q_{i+1} \in \mathbb{S}^2_{i+1}$ (para $i < n$), e $p_n \in \mathbb{S}^2_n$ com $q_1 \in \mathbb{S}^2_1$.
   (c) X é um torus com quatro discos preenchidos (figura 2).

   Dica: Para (a) veja o exercício 1. Para (b) e (c), pense no recobrimento $p : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$.

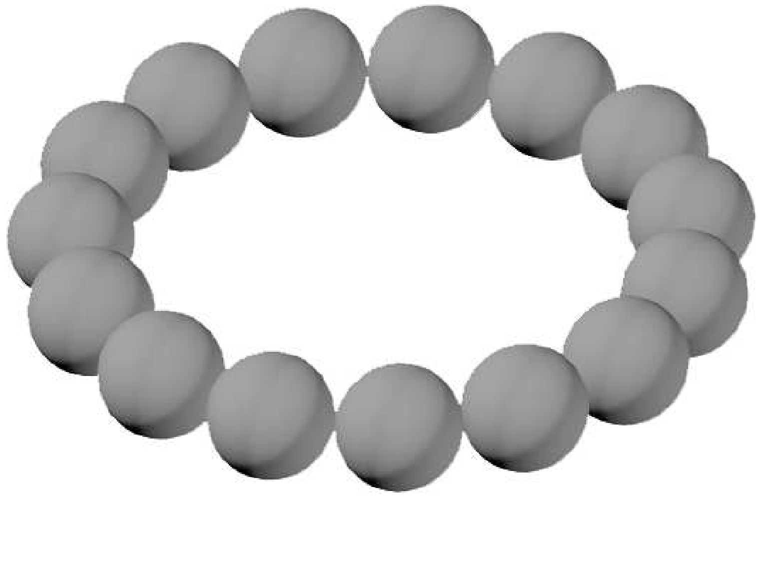

Figura 1: Colar de Pérolas.

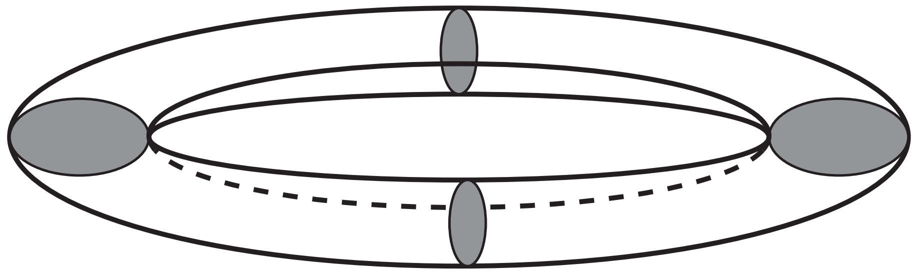

Figura 2: Torus com quatro discos preenchidos.

8. Mostre que existe um recobrimento $p : \mathbb{T}_3 \to \mathbb{T}_2$ do 3-Torus $\mathbb{T}_3 = \mathbb{T}\#\mathbb{T}\#\mathbb{T}$ no 2-Torus $\mathbb{T}_2 = \mathbb{T}\#\mathbb{T}$. (Dica: procure uma ação propriamente descontínua de $\mathbb{Z}_2$ em $\mathbb{T}_3$). Observação: Note que isso mostra que $\pi_1(\mathbb{T}_3, x)$ e um subgrupo de $\pi_1(\mathbb{T}_2, y)$. Isto pode ser um pouco anti-intuitivo j que $\mathbb{T}_3$ "tem mais buracos que"$\mathbb{T}_2$.

9. Mostre que a aplicação identidade de $\mathbb{S}^1$ não pode ser homotópica a uma aplicação constante.

10. Seja $n \geq 2$, e $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^2$ a projeção nas primeiras duas coordenadas (i.e., $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}^{n-2}$, e $\pi(u, v) = u$). Mostre que se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^2$ é uma função suficientemente pequena, então existe $x \in \mathbb{R}^n$, tal que $\pi(x) + f(x) = 0$ (em outras palavras, mostre que existe $\varepsilon > 0$ tal que para toda função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^2$ com $||f(y)|| < \varepsilon$ para todo $y \in \mathbb{R}^n$, existe $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $\pi(x) + f(x) = 0$).

Dica: Assuma que $\pi(x) + f(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Escreva $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}^{n-2}$, e para cada $v \in \mathbb{R}^{n-2}$ considere a aplicação

$$g_v : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1, \quad g_v(u) = \frac{u + f(u,v)}{||u + f(u,v)||}.$$

Mostre que g_v é ao mesmo tempo homotópico à identidade e à uma aplicação constante. Utilize o exercício anterior.