Topologia e Geometria – Lista de Exercícios 3

**Resolva os seguintes exercícios. Justifique suas respostas. Os exercícios 2(c), 2(e), 13, 16, 22, e 23 deverão ser entregues até o fim da aula na quarta-feira dia 01-10-2013**

1. Seja $X$ um complexo ceular. Mostre que $X$ é compacto se e somente se o número total de células na decomposição celular é finito.

2. Exiba na figura uma decomposição celular para cada um dos seguintes espaços. Calcule o número de Euler.

   (a) $X = \mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2$ (figura 1)

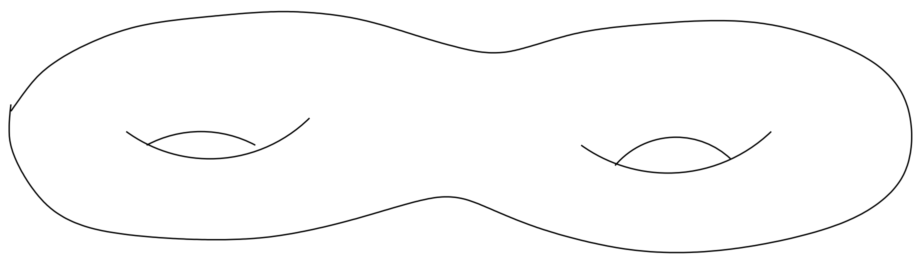

Figura 1: 2-Torus.

   (b) $X = \mathbb{T}^2 \vee \mathbb{T}^2$ (figura 2)

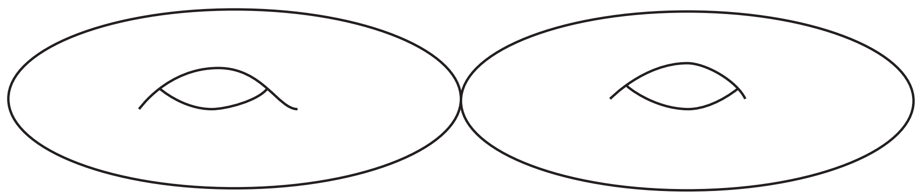

Figura 2: Produto Wedge $\mathbb{T}^2$ com $\mathbb{T}^2$.

   (c) $X$ = colar de $n$ pérolas (figura 3). Aqui $X$ é o espaço obtido de $n$ esferas ($n \geq 3$), $\mathbb{S}^2_1, \ldots, \mathbb{S}^2_n$, tomando dois pontos distintos $p_i$ e $q_i$ em cada uma delas identificando $p_i \in \mathbb{S}^2_i$ com um de $q_{i+1} \in \mathbb{S}^2_{i+1}$ (para $i < n$), e $p_n \in \mathbb{S}^2_n$ com $q_1 \in \mathbb{S}^2_1$.

   (d) $X = \mathbb{S}^2 \vee \mathbb{S}^2 \vee \mathbb{S}^2 \vee \mathbb{S}^2 \vee \mathbb{S}^1$ (figura 4)

   (e) $X$ é um torus com quatro discos preenchidos (figura 5).

3. Mostre que $\mathbb{P}^2$ pode ser obtido da Faixa de Möbius colando uma 2-célula.

4. (a) Mostre que se $\Sigma_1$ e $\Sigma_2$ são duas superfícies, então $\chi(\Sigma_1 \# \Sigma_2) = \chi(\Sigma_1) + \chi(\Sigma_2) - 2$

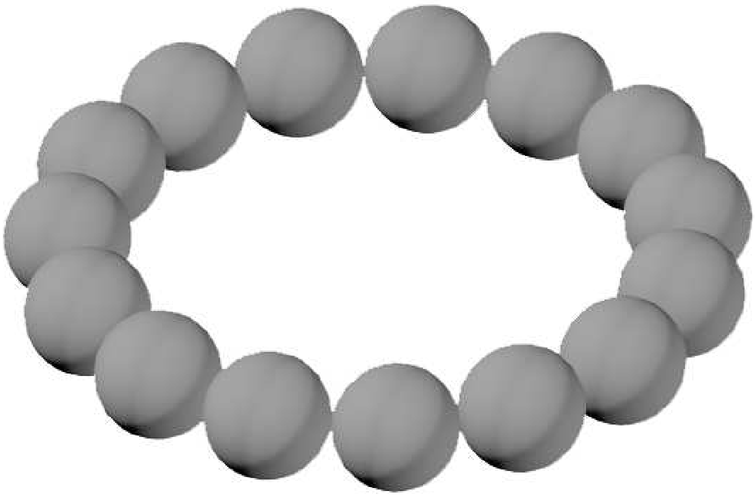

Figura 3: Colar de Pérolas.

(b) Calcule o número de Euler dos seguintes espaços:

1. $\mathbb{S}^2$
2. $\mathbb{T}^2_g = \mathbb{T}^2 \# \cdots \# \mathbb{T}^2$ ($g$ vezes)
3. $\mathbb{P}^2_h = \mathbb{P}^2 \# \cdots \# \mathbb{P}^2$ ($h$ vezes)

5. Considere o círculo $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : ||z|| = 1\}$ e a aplicação de colagem $f_n : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, $f_n(z) = z^n$.
   (a) Descreva um esquema de etiquetagem para o espaço $X$ obtido de $\mathbb{S}^1$ colando uma 2-célula com aplicação de colagem $f_n$.
   (b) Para quais valores de $n$ o espaço obtido acima é uma superfície?

6. Exiba uma decomposição celular de $\mathbb{P}^2$ com exatamente duas 0-células, 3 1-células e duas 2-células.

7. (a) Mostre que todo espaço contrátil é conexo por arcos.
   (b) Mostre que todo espaço convexo é contrátil.
   (c) Dê um exemplo de um espaço $X$ que é contrátil, mas não é convexo.
   (d) Mostre que $X$ é contrátil se e somente se $Id_X$ é homotópica à uma aplicação constante.

8. (a) Mostre que $Y$ é contrátil se e somente se quaisquer $f, g \in C(X, Y)$ são homotópicos (para todo espaço topológico $X$).
   (b) Mostre que $X$ é contrátil se e somente se quaisquer $f, g \in C(X, Y)$ são homotópicos (para todo espaço topológico conexo por arcos $Y$). O que se pode dizer quando $Y$ não é conexo por arcos?

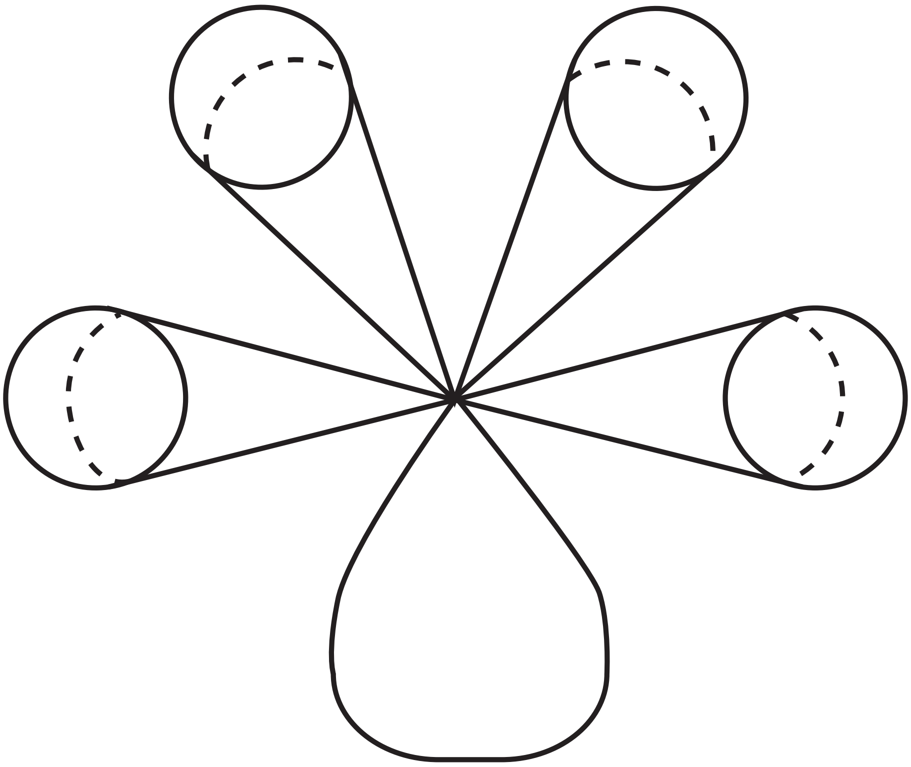

Figura 4: $X = \mathbb{S}^2 \vee \mathbb{S}^2 \vee \mathbb{S}^2 \vee \mathbb{S}^2 \vee \mathbb{S}^1$ .

9. Seja $X$ um espaço topológico e seja $Cil(X) = X \times I$ o cilindro sobre $X$. Mostre que $Cil(X)$ é homotopicamente equivalente à $X$.

10. Seja $C(X) = Cil(X)/\sim$ onde $(x,t) \sim (y,s)$ se e somente se $(x,t) = (y,s)$ ou $t = s = 1$. Mostre que $C(X)$ é contrátil.

11. Mostre que a letra "A"é homotópicamente equivalente á letra "O".

12. Mostre que o Torus com quatro discos preenchidos (figura 5) é homotopicamente equivalente à um colar de quatro pérolas (veja a figura 3 e o exercício 2(c))

13. Seja $C = \mathbb{S}^1 \times I$.
    (a) Mostre (através de desenhos) que se $p = (x,t)$ com $t \neq 0$ e $t \neq 1$, então $C - \{p\}$ é homotopicamente equivalente à $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$.
    (b) Mostre (através de desenhos) que se $p = (x,t)$ com $t = 0$ ou $t = 1$, então $C - \{p\}$ é homotopicamente equivalente à $\mathbb{S}^1$.

14. Mostre que o espaço obtido removendo 2 pontos de $\mathbb{R}^n$ é homotopicamente equivalente à $\mathbb{S}^{n-1} \vee \mathbb{S}^{n-1}$.

15. (a) Sejam $p$ e $q$ dois pontos distintos da esfera $\mathbb{S}^n$. Mostre que $\mathbb{S}^n - \{p,q\}$ é homotopicamente equivalente á $\mathbb{S}^{n-1}$
    (b) Sejam $p_1, \ldots p_k$ pontos distintos da esfera $\mathbb{S}^n$. Mostre que $\mathbb{S}^n - \{p_1, \ldots, p_k\}$ é homotopicamente equivalente á $\mathbb{S}^{n-1} \vee \mathbb{S}^{n-1} \vee \cdots \vee \mathbb{S}^{n-1}$ ($k-1$ vezes).

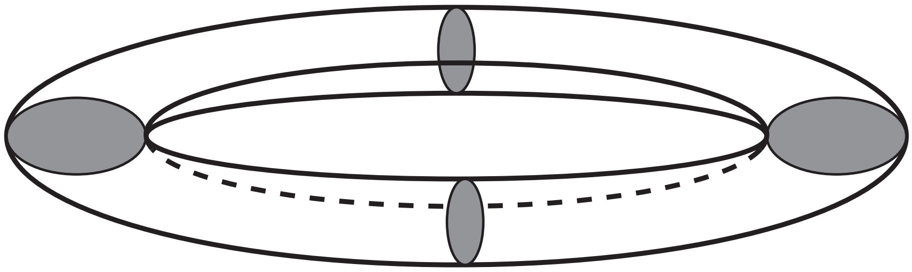

Figura 5: Torus com quatro discos preenchidos.

16. Suponha que $X$ é obtido de $A$ colando uma $n$-célula. Mostre que se $x \in X - A$, então $i : A \to X - \{x\}$ é uma equivalencia de homotopia. (Escreva a prova de forma cuidadosa e detalhada!)

17. Construa em $\mathbb{S}^3$ 3 campos de vetrores que sejam linearmente independentes em todos os pontos. (Dica: pense em $\mathbb{S}^3$ com os quaternions de norma 1)

18. Seja $X$ um espaço topológico, e $A \subset X$ um subespaço. Mostre que existe uma retração $r : X \to A$ se e somente se para todo espaço $Y$ e toda aplicação contínua $f : A \to Y$ existe uma estens ao contínua $\tilde{f} : X \to Y$.

19. Mostre que $\mathbb{R}^n - \mathbb{R}^k$ é homotopicamente à $\mathbb{S}^{n-k-1}$.

20. Seja $X$ um espaço obtido de 3 triângulos colados em uma mesma aresta (com esquema de etiquetagem $abc$ & $ade$ & $afg$). Seja $p$ um ponto no interior da aresta. Mostre que para toda vizinhança $U$ de $p$ em $X$, $U \cap (X - \{p\})$ é homotpicamente equivalente à $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$.

21. Seja $X$ um espaço conexo por arcos e $x \in X$. Mostre que o espaço

$$P(X, x) = \{\alpha : I \to X : \alpha(0) = x\}$$

é contrátil.

22. Dados dois caminhos $\gamma_1$ e $\gamma_2$ de $p$ à $q$ em $X$, mostre que os homomorfismos associados

$$A_{\gamma_i} : \pi_1(X, p) \to \pi_1(X, q)$$

coincidem ($A_{\gamma_1} = A_{\gamma_2}$) se e somente se $[\gamma_1 * \gamma_2^{-1}]$ pertence ao centro de $\pi_1(X, p)$ (i.e., comuta com todos os elementos).

23. Mostre que $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ não são homeomorfos. (Pode assumir que $\pi_1(\mathbb{S}^1, p) \neq \{1\}$)

24. Dê um exemplo de uma função sobrejetora (respectivamente injetora) contínua de $X$ em $Y$, tal que $f_\sharp : \pi_1(X, p) \to \pi_1(Y, q)$ não é sobrejetora (respectivamente injetora).

25. Mostre que uma retração sempre induz uma aplicação sobrejetora entre os grupos fundamentais.

26. Seja $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ e considere a aplicação

$$f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2, \quad f(e^{2\pi i x}, e^{2\pi i y}) = (e^{2\pi i (nx+my)}, e^{2\pi i (px+qy)}),$$

com $m, n, p, q \in \mathbb{Z}$.

(a) Determine a aplicação induzida no grupo fundamental.

(b) Mostre que $f$ é homeomorfismo se e somente se é equivalência de homotopia.

(c) Depermine para quais valores de $m, n, p, q$ que $f$ é um homeomorfismo.