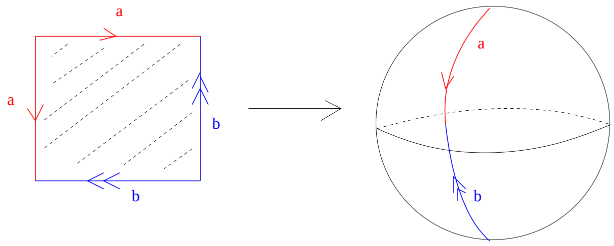
Topologia e Geometria – Lista de Exercícios 1

Resolva os seguintes exercícios. Justifique suas respostas. Os exercícios 3 e 4 deverão ser entregues até o fim da aula na segunda-feira dia 26-08-2013

1. Seja $\mathbb{S}^2$ a esfera bidimensional que é definida como o espaço quociente obtido identificando as fronteiras de um quadrado conforme a figura 1. Ou seja, se denotarmos o intervalo $[0,1]$ por I, então
$$\mathbb{S}^2 = \{(x,y) \in I \times I\}/\sim$$
onde identificamos $(0,y) \sim (1-y,1)$, e $(x,0) \sim (1,1-x)$.



The sphere obtained from a square glueing as indicated in the picture

Figura 1: Esfera

(a) Mostre que $\mathbb{S}^2$ é uma variedade topológica, i.e., uma superfície.

(b) Mostre que $\mathbb{S}^2$ é homeomorfo à esfera redonda usual:
$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1.\}$$

2. Seja $\mathbb{T}^2$ o torus, definido como o espaço quociente obtido identificando as fronteiras de um quadrado conforme a figura 2. Ou seja,
$$\mathbb{T}^2 = \{(x,y) \in I \times I\}/\sim$$
onde identificamos $(0,y) \sim (1,y)$, e $(x,0) \sim (x,1)$.

(a) Mostre que $\mathbb{T}^2$ é uma variedade topológica, i.e., uma superfície.

(b) Mostre que $\mathbb{T}^2$ é homeomorfo ao produto $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, onde $\mathbb{S}^1$ denota o círculo redondo:
$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 1.\}$$

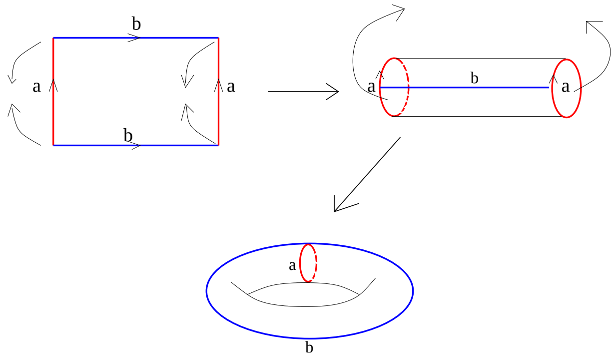


Figura 2: Torus

3. Seja $\mathbb{P}^2$ o plano projetivo, definido como o espaço quociente obtido identificando as fronteiras de um quadrado conforme a figura 3. Ou seja,

$$\mathbb{P}^2 = \{(x, y) \in I \times I\}/\sim$$

onde identificamos $(0, y) \sim (1, y)$, e $(x, 0) \sim (1 - x, 1)$.

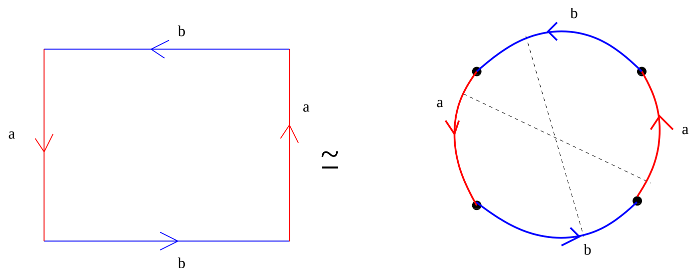


Figura 3: Plano Projetivo

Denote por $D \subset \mathbb{R}^2$ o disco fechado de raio 1.

(a) Mostre que $\mathbb{P}^2$ é homeomorfo ao espaço obtido identificando a fronteira $\partial D = \mathbb{S}^1$ de D através da aplicação antípoda (Figura 4)

$$A : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1, \quad A(x, y) = (-x, -y).$$

(b) Mostre que $\mathbb{P}^2$ é homeomorfo ao espaço obtido identificando um ponto p na esfera redonda padrão com seu anípoda $-p$.

(c) Mostre que $\mathbb{P}^2$ é homeomorfo ao espaço das retas que passam pela origem em $\mathbb{R}^3$. A topologia deste espaço de retas pode ser descrita como a topologia gerada pela seguinte base $\mathcal{B}$ de abertos: $U \in \mathcal{B}$ se e somente se existe $\theta \in [0, 2\pi]$ tal que para todo $\ell_1, \ell_2 \in U$, o ângulo entre ℓ_1 e ℓ_2 é menor que θ.

(d) Mostre que $\mathbb{P}^2$ é uma superfícíe.

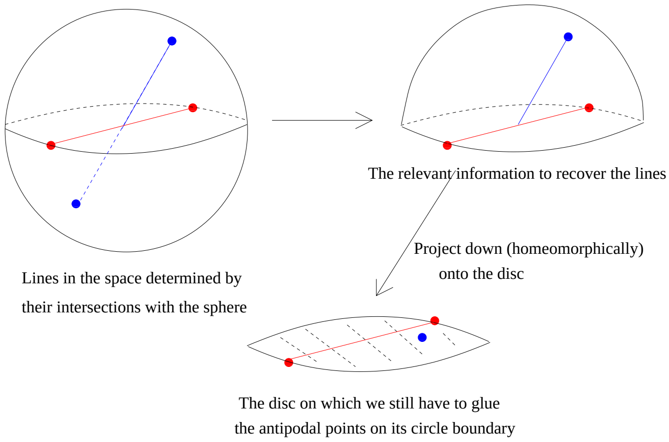


Figura 4: Plano Projetivo

4. (a) Seja Σ uma superfcie qualquer. Mostre que $\Sigma \# \mathbb{S}^2$ é homeomorfo à Σ.
   (b) O mesmo é verdade para $M \# \mathbb{S}^n$, onde M é uma variedade de dimensão n qualquer?