Topologia Algébrica I – Lista 3 – Teorema de Seifert - van Kampen

O objetivo dessa lista é que vocês demonstrem o teorema de Seifert e van Kampen:
Teorema: Se $X = U \cup V$ onde $U, V, U \cap V$ são abertos conexos por caminhos, e $x \in U \cap V$, então

$$\pi(X, x) \simeq \frac{\pi_1(U, x) * \pi_1(V, x)}{< i_*\pi_1(U \cap V, x) >}$$

onde $< i_*\pi_1(U \cap V, x) >$ é o fecho normal do subconjunto

$$i_*\pi_1(U \cap V, x) = \{(i_U[\gamma])(i_V[\bar{\gamma}]) : [\gamma] \in \pi_1(U \cap V, x)\} \subset \pi_1(U, x) * \pi_1(V, x).$$

Utilize as seguintes notações:

- $\alpha \sim_U \beta$ se α é homotopico a β relativo a ∂I em U. Analogamente para V e $U \cap V$. Homotopias relativas a ∂I em X serão denotadas simplesmente por $\sim$.
- $[\alpha]_U$ é a classe homotopia relativa a ∂I de α em U. Analogamente para classes de homotopia relativas em V e $U \cap V$. $[\alpha]$ é a classe homotopia relativa a ∂I de α em X.
- Em particular vamos escrever $i_U([\alpha]_{U\cap V}) = [\alpha]_U$ e assim por diante.
- Denote por $[\alpha]_U * [\beta]_V$ o produto de $[\alpha]_U$ e $[\beta]_V$ no produto livre $\pi_1(U, x) * \pi_1(V, x)$.
- Denote por $[\alpha]_U[\alpha']_U$ o produto de $[\alpha]_U$ e $[\alpha']_U$ em $\pi_1(U, x)$.

1. Dado $\alpha \in \Omega(X, x)$, mostre que existe $n \in \mathbb{N}$ grande o suficiente tal que $\alpha([\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]) \subset U$ ou V para todo $i = 1, \ldots, n$.
2. Use o item acima para construir um homomorfismo sobrejetor $\Phi : \pi_1(U, x) * \pi_1(V, x) \to \pi_1(X, x)$. Para fazer isso, considere para cada i uma curva h_i que liga x a $\alpha(i/n)$ de tal forma que $h_i(s) \in U, V$ ou $U \cap V$ para todo $s \in I$, sempre que $\alpha(i/n) \in U, V$ ou $U \cap V$. Se $\alpha(i/n) = x$, tome $h_i = c_x$ (a curva constante).
3. Mostre que $i_*\pi_1(U \cap V, x) \subset \mathrm{Ker}\Phi$. Conclua que $< i_*\pi_1(U \cap V, x) > \subset \mathrm{Ker}\Phi$.
4. Mostre que $< i_*\pi_1(U \cap V, x) > = \mathrm{Ker}\Phi$. Este é o coração da demonstração do teorema. Sugiro que vcs olhem a demonstração escrita nas minhas notas de aula (ou no livro de preferência de vcs).