Topologia Algébrica I – Lista de Exercícios 2 – Recobrimentos 1-Conexos

Convenção: Nesta lista todos os espaos são conexos por caminhos.

1. Sejam $p_1 : E_1 \to B$ e $p_2 : E_2 \to B$ recobrimentos. Mostre que se $\tilde{p}_1 : E_1 \to E_2$ é um levantamento de p_1, então $\tilde{p}_1$ é uma aplicação de recobrimento.

2. Mostre que se $p_1 : E_1 \to B$ é um recobrimento com E_1 um espaço simplesmente conexo, e $p_2 : E_2 \to B$ é um recobrimento, então E_1 é também um recobrimento de E_2.

3. Mostre que a composta de aplicações de recobrimento é uma aplicação de recobrimento.

4. Mostre que se E_1 e E_2 são recobrimentos de B e ambos E_1 e E_2 são simplesmente conexos, então E_1 é homeomorfo a E_2.

   Os exercícios acima sugerem a seguinte definição: Um recobrimento 1-conexo de um espaço X é denotado por $\tilde{X}$ e chamado de **recobrimento universal de** X. Tal recobrimento, quando existe, é único a menos de homeomorfismo.

   A questão agora é saber quando um espaço X admite um recobrimento universal.

   Definição: Um espaço X é dito **semi-localmente simplesmente conexo** se para todo $x \in X$, existe uma vizinhança U de X tal que a inclusão $i : U \to X$ induz uma aplicação trivial $i_* : \pi_1(U, x) \to \pi_1(X, x)$, ou seja, todo laço em U é homotópico (em X) a um laço constante.

5. Dê um exemplo de um espaço X que não é semi-localmente simplesmente conexo.

6. Mostre que se X admite um recobrimento 1-conexo, então X é semi-localmente simplesmente conexo.

7. Seja X um espaço topológico conexo por caminhos, localmente conexo por caminhos e semi-localmente simplesmente conexo. Seja

$$\mathcal{U} = \{U \subset X : U \text{ é aberto conexo por caminhos e } \pi_1(U) \to \pi_1(X) \text{ é trivial}\}.$$

   Mostre que $\mathcal{U}$ é uma base da topologia de X.

8. Fixe $x_0 \in X$ e seja

$$\tilde{X} = \{[\gamma] : \gamma(0) = x_0\}$$

   onde $\gamma : I \to X$ é uma curva e $[\gamma]$ denota a classe de homotopia relativa a ∂I de γ. Considere em $\tilde{X}$ os seguintes subconjuntos:

$$\tilde{U}_{[\gamma]} = \{[\gamma * \eta] : \eta : I \to U, \eta(0) = \gamma(1)\}.$$

   Mostre que:

   (a) $\tilde{U}_{[\gamma]}$ está bem definido, isto é, só depende de U e $[\gamma]$, e não de γ.

(b) Se $p : \tilde{X} \to X$ é a aplicção que leva $[\gamma]$ em $\gamma(1)$, então $p|_{\tilde{U}_{[\gamma]}} : \tilde{U}_{[\gamma]} \to U$ é uma bijeção.

(c) Se $[\gamma'] \in \tilde{U}_{[\gamma]}$ então $\tilde{U}_{[\gamma]} = \tilde{U}_{[\gamma']}$.

(d) $\tilde{\mathcal{U}} = \{\tilde{U}_{[\gamma]}\}$ forma uma base para uma topologia em $\tilde{X}$.

(e) A projeção $p : \tilde{U}_{[\gamma]} \to U$ é um homeomorfismo.

(f) $p : \tilde{X} \to X$ é um recobrimento.

(g) $\tilde{X}$ é conexo por caminhos.

(h) $\tilde{X}$ é simplesmente conexo.

Observação: A ideia para a construção do recobrimento simplesmente conexo acima vem da seguinte análise: Se $p : E \to X$ é um recobrimento 1-conexo, e $\tilde{X}$ é o conjunto definido acima, então

$$\psi : \tilde{X} \to E, \quad \psi([\gamma]) = \tilde{\gamma}_{e_0}(1)$$

é uma bijeção (exercício!). A ideia então é transportar toda a estrutura do recobrimento para $\tilde{X}$. A vantagem é que $\tilde{X}$ pode ser descrito somente em termos de X sem fazer menção a E, e portanto, pode ser usado para provar a existência de recobrimentos 1-conexos.