Topologia Algébrica I – Lista de Exercícios 6 – Hurewicz em dimenso 1

O objetivo desta lista é obter um demonstração do teorema de de Hurewicz em dimenso 1 que diz:

Teorema: Seja X um espaço topológico conexo por caminhos. Ento

$$H_1(X, \mathbb{Z}) \simeq \pi_1(X, x)_{ab}$$

onde $\pi_1(X, x)_{ab}$ denota a abelianização do grupo fundamental de X.

Definição: Seja G um grupo e seja $[G, G]$ o fecho normal do conjunto

$$\{ghg^{-1}h^{-1} : g, h \in G\} \subset G.$$

A **abelianização de** G é o grupo abeliano

$$G_{ab} = \frac{G}{[G, G]}.$$

1. Mostre que se A é um grupo abeliano e $\phi : G \to A$ é um homomorfismo, então existe um único homomorfismo $\bar{\phi} : G_{ab} \to A$ tal que o diagrama abaixo é comutativo

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\pi"'] & A \\ G_{ab} \arrow[ur, "\bar{\phi}"'] & \end{tikzcd}$$

   Mostre que essa propriedade universal caracteriza G_{ab} a menos de isomorfismo, i.e., se H é um grupo abeliano e $\pi : G \to H$ satisfaz a propriedade universal, então $H \simeq G_{ab}$.

2. Sejam $f, g : \Delta^1 = I \to X$. Mostre que $f * g$ é homologo a $f + g$. Ou seja, construa uma aplicação $\sigma : \Delta^2 \to X$ tal que $\partial\sigma = f + g - f * g$. (DICA: Defina σ como sendo f na face (e_0, e_1), g na face (e_1, e_2), $f * g$ na face (e_0, e_2) e encontre uma extensão contínua explicita para o interior de Δ^2.)

3. Mostre que se $f : \Delta^1 \to X$ é uma aplicação constante, então $f \in B_1(X)$ é um bordo.

4. Seja $f^{-1} : \Delta^1 \to X$ o caminho $f^{-1}(t) = f(1 - t)$. Mostre que f^{-1} é homologo a $-f$. (DICA: Mostre que $f + f^{-1} - c_{f(0)}$ é um bordo, onde $c_{f(0)}$ é a aplicação constante igual a $f(0)$.

5. Mostre que se f e g são caminhos homotópicos com relação a $\partial\Delta^1$, então f é homologo a g.

6. Mostre que se $f : \Delta^1 \to X$ é um laço ($f(0) = f(1)$), então $\partial f = 0$.

7. Mostre que a aplicação $\phi : \pi_1(X,x) \to H_1(X,\mathbb{Z})$ que leva uma classe de homotopia f na classe de homologia de f é um homomorfismo de grupos bem definido. Conclua que ϕ induz um homomorfismo $\bar{\phi} : \pi_1(X,x)_{ab} \to H_1(X,\mathbb{Z})$.

8. Para cada $y \in X$, seja γ_y um caminho em X que começa em x e acaba em y (X é assumido conexo por caminhos) e seja γ_x o caminho constante em x. Considere a aplicação

$$\psi : C_1(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow \pi_1(X,x)_{ab}, \quad \psi(f) = [\gamma_{f(0)} * f * \gamma_{f(1)}^{-1}] \bmod [\pi_1(X,x), \pi_1(X,x)].$$

Mostre que $B_1(X) \subset \mathrm{Ker}\psi$. Conclua que ψ induz uma aplicação

$$\bar{\psi} : H_1(X,x) \longrightarrow \pi_1(X,x)_{ab}$$

9. Mostre que $\bar{\psi} \circ \bar{\phi} = \mathrm{Id}_{\pi_1(X,x)_{ab}}$

10. Interprete as escolhas de curvas γ acima como um homomorfismo

$$\gamma : C_0(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow C_1(X,\mathbb{Z})$$

. Seja $z = \sum n_i f_i \in Z_1(X,\mathbb{Z})$ um cíclo e denote por $[[z]]$ sua classe de homologia. Mostre que

$$\bar{\phi} \circ \bar{\psi}([[z]]) = [[z]] - [[\gamma_{\partial z}]].$$

Conclua que $\bar{\phi} \circ \bar{\psi} = \mathrm{Id}_{H_1(X,\mathbb{Z})}$ e portanto que $\bar{\phi}$ é um isomorfismo.

11. Calcule $H_1(T_g,\mathbb{Z})$, onde $T_g = T\#T\#\cdots\#T$ é a soma conexa de g cópias do Torus.

12. Calcule $H_1(\mathbb{RP}^2_h,\mathbb{Z})$, onde $\mathbb{RP}^2_h = \mathbb{RP}^2\#\mathbb{RP}^2\#\cdots\#\mathbb{RP}^2$ é a soma conexa de h cópias do plano projetivo.

13. Sejam M e N variedades topológicas de mesma dimensão $n \geq 3$. Calcule $H_1(M\#N,\mathbb{Z})$ em termos de $H_1(M,\mathbb{Z})$ e $H_1(N,\mathbb{Z})$. Calcule $H_1(M - \{p\},\mathbb{Z})$ em termos de $H_1(M,\mathbb{Z})$.

Curiosidade: O teorema de Hurewicz no caso geral diz que se X é $(n-1)$-conexo onde $n \geq 2$ então a aplicação

$$h_n : \pi_n(X,x) \longrightarrow H_n(X,\mathbb{Z}), \quad h_n[\gamma] = \gamma_*[[S^n]]$$

é um isomorfismo. Aqui, $\gamma : (S^n,p) \to (X,x)$ e $[[S^n]]$ denota a classe fundamental de S^n.

Como consequência segue que se X é 1-conexo e $\tilde{H}_i(X,\mathbb{Z}) = 0$ para todo $0 \leq i \leq n-1$, então $\pi_i(X,x) = 0$ para todo $0 \leq i \leq n-1$ (ou seja X é $n-1$-conexo) e $\pi_n(X,x) \simeq H_n(X,\mathbb{Z})$.