Topologia Algébrica I – Lista de Exercícios 5 – Aproximação Simplicial

O objetivo desta lista é obter um demonstração do teorema de aproximação simplicial que diz:

Teorema: Sejam $\mathcal{K}$ e $\mathcal{L}$ complexos simpliciais finitos e $f : |\mathcal{K}| \to |\mathcal{L}|$ uma aplicação contínua. Então existe um $d \geq 0$ e uma aplicação simplicial $g : \mathrm{Sd}^d(\mathcal{K}) \to \mathcal{L}$ tal que $|g|$ é homotópica a f.

No teorema acima, $\mathrm{Sd}^d\mathcal{K}$ denota o complexo simplicial obtido fazendo subdivisões baricêntricas d vezes em $\mathcal{K}$, e

$$|g| : |\mathrm{Sd}^d\mathcal{K}| = |\mathcal{K}| \to |\mathcal{L}|$$

é a aplicação induzida por g nas realizações geométricas do complexo simplicial.

Nesta lista todos os complexos simpliciais serão sempre complexos simpliciais finitos.

1. A subdivisão baricentrica de $\mathcal{K}$ é o complexo simplicial

   $$\mathrm{Sd}\mathcal{K} = \{(b_{\sigma_0}, \dots, b_{\sigma_k}) : b_{\sigma_i} \text{ é o baricentro de } \sigma_i \in \mathcal{K}, \text{ e } \sigma_i \text{ é face própria de } \sigma_{i+1} \text{ para todo } i\}.$$

   Mostre que $|\mathcal{K}| = |\mathrm{Sd}\mathcal{K}|$.

2. O diametro de $\mathcal{K}$ é definido como o maxímo de todos os diametros dos simplexos de $\mathcal{K}$. Mostre que se a dimensão de $\mathcal{K}$ é n, então

   $$\mathrm{Diam}(\mathrm{Sd}\mathcal{K}) \leq \frac{n}{n+1}\mathrm{Diam}(\mathcal{K}).$$

   Conclua que

   $$\lim_{\ell\to\infty} \mathrm{Diam}(\mathrm{Sd}^\ell\mathcal{K}) = 0.$$

3. Para $x \in |\mathcal{K}|$ defina o **carregador de** x, denotado por $\mathrm{carr}(x)$ como o simplexo de menor dimensão de $\mathcal{K}$ que contém x. Mostre que $y \in \mathrm{carr}(x)$ se e somente se $\mathrm{carr}(y) \subset \mathrm{carr}(x)$.

4. Lembre que uma aplicação $g : |\mathcal{K}| \to |\mathcal{L}|$ é uma aplicação simplicial se para todo $\sigma = (v_{\alpha_1}, \dots, v_{\alpha_\ell}) \in \mathcal{K}$ temos que $g(v_{\alpha_1}), \dots, g(v_{\alpha_\ell})$ são vértices (não necessariamente disjuntos) de um simplexo de $\mathcal{L}$, e g é linear no interior dos simplexos.

   Dizemos que g é uma **aproximação simplicial** de $f : |\mathcal{K}| \to |\mathcal{L}|$ se g é uma aplicação simplicial tal que $g(x) \in \mathrm{carr}(f(x))$ para todo $x \in |\mathcal{K}|$.

   Mostre que se g é aproximação simplicial de f, então g é homotópica a f.

5. Mostre que se g é aplicação simplicial, então $g(\mathrm{carr}(x)) = \mathrm{carr}(g(x))$.

6. Sejam $f_1 : |\mathcal{K}| \to \mathcal{L}$, e $f_2 : |\mathcal{L}| \to |\mathcal{M}|$. Mostre que se g_1 é aproximação simplicial de f_1 e g_2 é aproximação simplicial de f_2, então $g_2 \circ g_1$ é aproximação simplicial de $f_2 \circ f_1$.

7. Seja v um vértice de $\mathcal{K}$. Defina a **estrela aberta de** v por

$$\mathrm{St}_{\mathcal{K}}(v) = \{x \in |\mathcal{K}| : v \in \mathrm{carr}(x)\}.$$

Mostre que $\mathrm{St}_{\mathcal{K}}(v)$ é aberto em $|\mathcal{K}|$ e que $\{\mathrm{St}_{\mathcal{K}}(v) : v \in \mathcal{K}^0\}$ é uma cobertura aberta de $|\mathcal{K}|$.

8. Sejam $v_0, \ldots, v_r$ vérticies de $\mathcal{K}$. Mostre que

$$\bigcap_{i=0}^{r} \mathrm{St}_{\mathcal{K}}(v_i) \neq \emptyset \iff (v_0, \ldots, v_r) \in \mathcal{K}.$$

9. Seja $f : |\mathcal{K}| \to |\mathcal{L}|$. Sejam $w_1, \ldots, w_p$ os vértices de $\mathcal{L}$. Mostre que existe $d \geq 0$ tal que para todo vértice $v \in \mathrm{Sd}^d\mathcal{K}$,

$$f(\mathrm{St}_{\mathrm{Sd}^d\mathcal{K}}(v)) \subset \mathrm{St}_{\mathcal{L}}(w_i)$$

para algum i.

10. Defina $g(v) = w_i$ onde v e w_i satisfazem a condição do exercício 9 acima, e estenda por linearidade para uma aplicação $g : |\mathrm{Sd}^d\mathcal{K}| \to |\mathcal{L}|$. Mostre que g é uma aplicação simplicial.

11. Conclua a demonstração do teorema da aproximação simplicial mostrando que g é aproximação simplicial de f.

12. Mostre que a aproximação simplicial de f pode ser tomada tão próxima de f quanto se queira, isto é, para todo $\varepsilon > 0$ existe $d \geq 0$ e uma aproximação simplicial de f

$$g : \mathrm{Sd}^d\mathcal{K} \to \mathcal{L}$$

tal que $\mathrm{dist}(f(x), g(x)) < \varepsilon$ para todo $x \in |\mathcal{K}|$.

13. Mostre que no teorema da aproximação simplicial é necessário permitir que subdivisões baricêntricas sejam feitas em $\mathcal{K}$ (ou seja, mostre que o teorema no é verdade se exigirmos que $d = 0$).