1 Um Pouco de Topologia e Variedades Topológicas

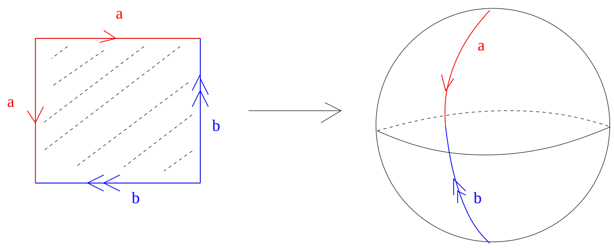
1. Uma **variedade topológica de dimensão** n é um espaço topológico M segundo contável e Hausdorff que é *localmente euclideano de dimensão* n, ou seja, tal que para cada $x \in M$, existe uma vizinhança $U \subset M$ de x e um homeomorfismo

$$\varphi : U \longrightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n.$$

Seja $\mathbb{S}^2$ a esfera bidimensional que é definida como o espaço quociente obtido identificando as fronteiras de um quadrado conforme a figura 1. Ou seja, se denotarmos o intervalo $[0,1]$ por I, então

$$\mathbb{S}^2 = \{(x,y) \in I \times I\}/\sim$$

onde identificamos $(0,y) \sim (1-y,1)$, e $(x,0) \sim (1,1-x)$.



The sphere obtained from a square glueing as indicated in the picture

Figura 1: Esfera

   (a) Mostre que $\mathbb{S}^2$ é uma variedade topológica, i.e., uma superfície.

   (b) Mostre que $\mathbb{S}^2$ é homeomorfo à esfera redonda usual:

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1.\}$$

2. Seja $\mathbb{T}^2$ o torus, definido como o espaço quociente obtido identificando as fronteiras de um quadrado conforme a figura 2. Ou seja,

$$\mathbb{T}^2 = \{(x,y) \in I \times I\}/\sim$$

onde identificamos $(0,y) \sim (1,y)$, e $(x,0) \sim (x,1)$.

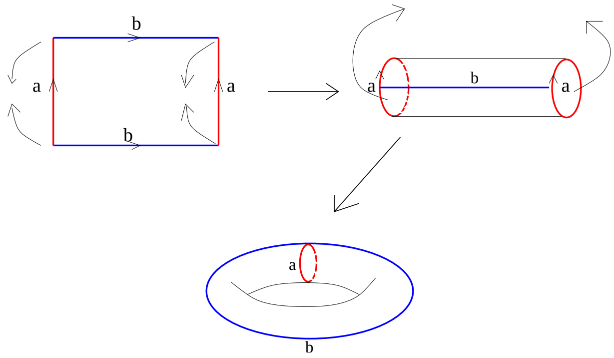


Figura 2: Torus

(a) Mostre que $\mathbb{T}^2$ é uma variedade topológica, i.e., uma superfície.

(b) Mostre que $\mathbb{T}^2$ é homeomorfo ao produto $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, onde $\mathbb{S}^1$ denota o círculo redondo:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1.\}$$

3. Seja $\mathbb{P}^2$ o plano projetivo, definido como o espaço quociente obtido identificando as fronteiras de um quadrado conforme a figura 3. Ou seja,

$$\mathbb{P}^2 = \{(x, y) \in I \times I\}/\sim$$

onde identificamos $(0, y) \sim (1, y)$, e $(x, 0) \sim (1 - x, 1)$.

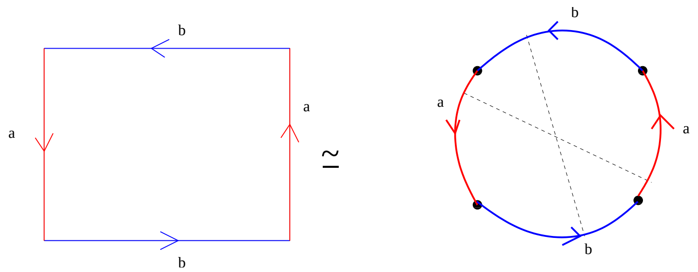


Figura 3: Plano Projetivo

Denote por $D \subset \mathbb{R}^2$ o disco fechado de raio 1.

(a) Mostre que $\mathbb{P}^2$ é homeomorfo ao espaço obtido identificando a fronteira $\partial D = \mathbb{S}^1$ de D através da aplicação antípoda (Figura 4)

$$A : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1, \quad A(x, y) = (-x, -y).$$

(b) Mostre que $\mathbb{P}^2$ é homeomorfo ao espaço obtido identificando um ponto p na esfera redonda padrão com seu anípoda $-p$.

(c) Mostre que $\mathbb{P}^2$ é homeomorfo ao espaço das retas que passam pela origem em $\mathbb{R}^3$. A topologia deste espaço de retas pode ser descrita como a topologia gerada pela seguinte base $\mathcal{B}$ de abertos: $U \in \mathcal{B}$ se e somente se existe $\theta \in [0, 2\pi]$ tal que para todo $\ell_1, \ell_2 \in U$, o ângulo entre ℓ_1 e ℓ_2 é menor que θ.

(OBS: Uma descrição equivalente é tomar $\mathbb{R}^3 - 0/\sim$ onde $v \sim w$ se e somente se existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $v = \lambda w$ (prove isso!))

(d) Mostre que $\mathbb{P}^2$ é uma superficície.

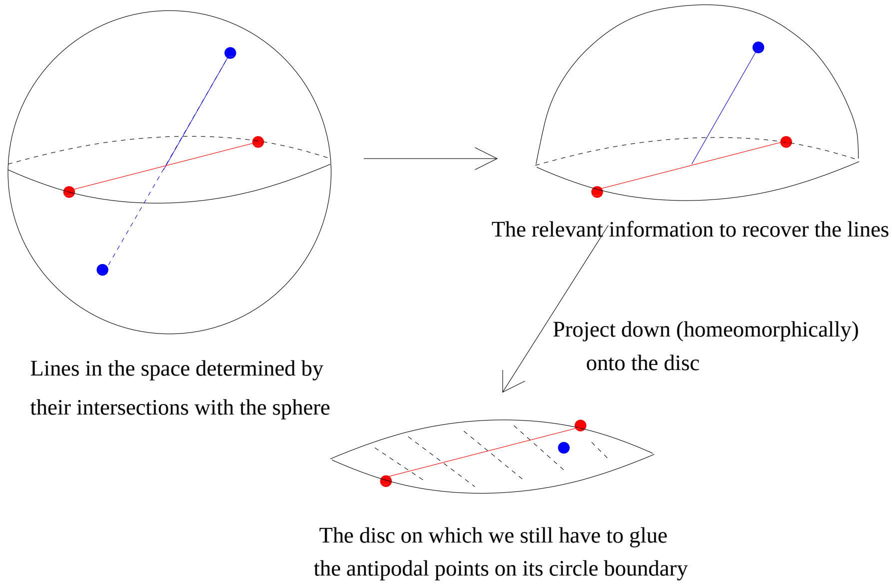


Figura 4: Plano Projetivo

4. Entenda a definição da soma conexa de duas variedades topológicas. (Procure em qualquer uma das referências para este curso, ou nas notas de aula disponibilizadas na referência 4)

5. (a) Seja Σ uma superfcie qualquer. Mostre que $\Sigma \# \mathbb{S}^2$ é homeomorfo à Σ.

   (b) O mesmo é verdade para $M \# \mathbb{S}^n$, onde M é uma variedade de dimensão n qualquer?

6. Construa em $\mathbb{S}^3$, 3 campos de vetrores que sejam linearmente independentes em todos os pontos. (Dica: pense em $\mathbb{S}^3$ com os quaternions de norma 1)

7. Seja

$$\mathbb{CP}^n = \{\ell \subset \mathbb{C}^{n+1} : \ell \text{ é um subespaço com } \dim_{\mathbb{C}} \ell = 1\},$$

ou seja, $\mathbb{CP}^n$, o espaço projetivo complexo, é o espaço das retas complexas (dimensão real 2) de $\mathbb{C}^n$.

   (a) Mostre que $\mathbb{CP}^n = (\mathbb{C}^{n+1} - \{0\})/\sim$, onde $(z_0, \ldots, z_n) \sim (z'_0, \ldots, z'_n)$ se e somente se existe $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$ tal que $(z_0, \ldots, z_n) = (\lambda z'_0, \ldots, \lambda z'_n)$.

   (b) Mostre que $\mathbb{CP}^n$ é homeomorfo a um quociente de $\mathbb{S}^{2n+1}$ por uma ação de $\mathbb{S}^1$.

(c) Mostre que $\mathbb{CP}^n$ é uma variedade topológica de dimensão $2n$.

(d) Mostre que $\mathbb{CP}^1 \simeq \mathbb{S}^2$.

(e) Mostre que $\mathbb{CP}^n$ é obtido de $\mathbb{CP}^{n-1}$ colando uma $2n$-célula. (Veja a definição no exercício 17)

(f) Conclua que $\mathbb{CP}^n$ é simplesmente conexo para todo n. (Faça esse exercício depois da aula sobre o Teorema de Seifert - van Kampen)

8. Sejam (X, x_0) e (Y, y_0) espaços pontuados. O **produto smash** de X e Y é o espaço pontuado definido por
$$X \wedge Y = \frac{X \times Y}{X \times \{y_0\} \cup \{x_0\} \times Y},$$
com ponto base $* = \{y_0\} \cup \{x_0\} \times Y$. (Por simplicidade, vou omitir o ponto base da notação). Mostre que:

(a) $X \wedge (Y \wedge Z)$ é homeomorfo $(X \wedge Y) \wedge Z$

(b) Se $f : (X, x_0) \to (Z, z_0)$ e $g : (Y, y_0) \to (W, w_0)$, então obtemos
$$f \wedge g : X \wedge Y \longrightarrow Z \wedge W, \quad f \wedge g([x, y]) = [f(x), g(y)].$$

(c) Se X e Z são espaos Hausdorff e Z é localmente compacto então a aplicação
$$A : [(Z \wedge X, *), (Y, y_0)] \longrightarrow [(X, x_0), (\mathrm{Maps}(Z, z_0), (Y, y_0), c_{y_0})],$$
$$A([f]) = [\hat{f}], \text{ onde } (\hat{f}(x))(z) = f[(z, x)]$$
é uma *equivalência natural*, onde $[\cdot, \cdot]$ denota classes de homotopia preservando ponto base de funções entre espaços pontuados, e $\mathrm{Maps}(Z, z_0), (Y, y_0), c_{y_0})$ denota o espaço das aplicações pontuadas entre (Z, z_0) e (Y, y_0) com a topologia compacto-aberta e ponto base a aplicação constante igual a y_0.

OBS: Uma equivalência natural nesse contexto significa que A é uma bijeção e para todo $g : (X, x_0) \to (X', x_0')$ e para todo $h : (Y, y_0) \to (Y', y_0')$, os seguintes diagramas são comutativos:

$$\begin{tikzcd}
{[(Z \wedge X, *), (Y, y_0)]} \arrow[r, "A"] & {[(X, x_0), (\mathrm{Maps}(Z, z_0), (Y, y_0), c_{y_0})]} \\
{[(Z \wedge X', *), (Y, y_0)]} \arrow[r, "A"'] \arrow[u, "(Id_Z \wedge g)^*"] & {[(X', x_0'), (\mathrm{Maps}(Z, z_0), (Y, y_0), c_{y_0})]} \arrow[u, "g^*"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
{[(Z \wedge X, *), (Y, y_0)]} \arrow[r, "A"] \arrow[d, "h_*"] & {[(X, x_0), (\mathrm{Maps}(Z, z_0), (Y, y_0), c_{y_0})]} \arrow[d, "h_*"'] \\
{[(Z \wedge X, *), (Y', y_0)]} \arrow[r, "A"'] & {[(X, x_0), (\mathrm{Maps}(Z, z_0), (Y', y_0'), c_{y_0'})]}
\end{tikzcd}$$

(d) O que podemos dizer, em analogia aos diagramas acima, quando temos $k : (Z, z_0) \to (Z', z_0')$?

(e) O **cone reduzido** sobre um espaço pontuado (X, x_0) é $C(X) = I \wedge X$, onde I é o intervalo $[0, 1]$ com ponto base 1. Mostre que $C(X)$ é sempre contrátil. Conclua que $C(X)$ é sempre homotpicamente equivalente ao cone (não reduzido) sobre X: $Con(X) = I \times X/\{1\} \times X$.

(f) A suspensão reduzida de um espaço pontuado (X, x_0) é o espaço pontuado $S(X) = S^1 \wedge X$, onde

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

com ponto base $(1, 0)$. Mostre que $S(S^n)$ é homotpicamente equivalente a S^{n+1}.

(g) Conclua dos itens acima que temos uma equivalência natural (de conjuntos) entre

$$\pi_1(Y, y_0) = [(S^1, 1), (Y, y_0)] \longrightarrow \pi_0(\Omega(Y, y_0), c_{y_0}),$$

onde $\Omega(Y, y_0)$ denota o espaço dos laços em Y que começam e terminam em y_0 com a topologia compacto-aberta.

2 Equivalência de Homotopia

9. (a) Mostre que todo espaço contrátil é conexo por caminhos.

   (b) Mostre que todo espaço convexo é contrátil.

   (c) Dê um exemplo de um espaço X que é contrátil, mas não é convexo.

   (d) Mostre que X é contrátil se e somente se Id_X é homotópica à uma aplicação constante.

10. (a) Mostre que Y é contrátil se e somente se quaisquer $f, g \in C(X, Y)$ são homotópicos (para todo espaço topológico X).

    (b) Mostre que X é contrátil se e somente se quaisquer $f, g \in C(X, Y)$ são homotópicos (para todo espaço topológico conexo por caminhos Y). O que se pode dizer quando Y não é conexo por caminhos?

11. Seja X um espaço topológico e seja $Cil(X) = X \times I$ o cilindro sobre X. Mostre que $Cil(X)$ é homotopicamente equivalente à X.

12. Seja $Con(X) = Cil(X)/\sim$ onde $(x, t) \sim (y, s)$ se e somente se $(x, t) = (y, s)$ ou $t = s = 1$. Mostre que $Con(X)$ é contrátil.

13. Mostre que a letra "A"é homotópicamente equivalente á letra "O".

14. Mostre que o Torus com quatro discos preenchidos (figura 8) é homotopicamente equivalente à um colar de quatro pérolas (veja a figura 7)

    O colar de n pérolas (figura 7). Aqui X é o espaço obtido de n esferas $(n \geq 3)$, $\mathbb{S}^2_1, \ldots, \mathbb{S}^2_n$, tomando dois pontos distintos p_i e q_i em cada uma delas identificando $p_i \in \mathbb{S}^2_i$ com um de $q_{i+1} \in \mathbb{S}^2_{i+1}$ (para $i < n$), e $p_n \in \mathbb{S}^2_n$ com $q_1 \in \mathbb{S}^2_1$.

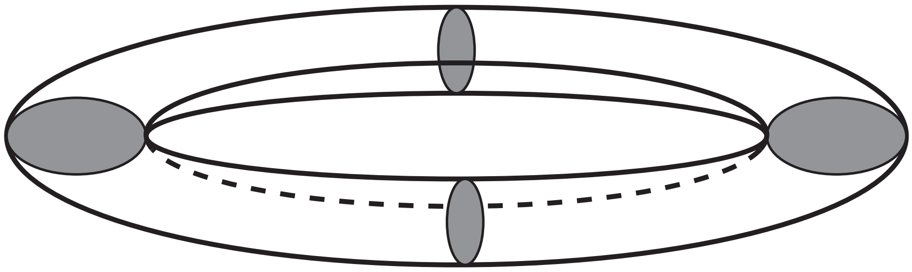


Figura 5: Torus com quatro discos preenchidos.

15. Seja $C = \mathbb{S}^1 \times I$.
    (a) Mostre que se $p = (x, t)$ com $t \neq 0$ e $t \neq 1$, então $C - \{p\}$ é homotopicamente equivalente à $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$.
    (b) Mostre que se $p = (x, t)$ com $t = 0$ ou $t = 1$, então $C - \{p\}$ é homotopicamente equivalente à $\mathbb{S}^1$.

16. Mostre que o espaço obtido removendo 2 pontos de $\mathbb{R}^n$ é homotopicamente equivalente à $\mathbb{S}^{n-1} \vee \mathbb{S}^{n-1}$.

17. (a) Sejam p e q dois pontos distintos da esfera $\mathbb{S}^n$. Mostre que $\mathbb{S}^n - \{p, q\}$ é homotopicamente equivalente á $\mathbb{S}^{n-1}$
    (b) Sejam $p_1, \ldots p_k$ pontos distintos da esfera $\mathbb{S}^n$. Mostre que $\mathbb{S}^n - \{p_1, \ldots, p_k\}$ é homotopicamente equivalente á $\mathbb{S}^{n-1} \vee \mathbb{S}^{n-1} \vee \cdots \vee \mathbb{S}^{n-1}$ ($k - 1$ vezes).

18. Suponha que X é obtido de A colando uma n-célula. Mostre que se $x \in X - A$, então $i : A \to X - \{x\}$ é uma equivalencia de homotopia. (Escreva a prova de forma cuidadosa e detalhada!)

    OBS: X é obtido de A colando uma n-célula se existe uma aplicação contínua

    $$\varphi : \mathbb{S}^{n-1} = \partial D^n \to X$$

    (chamada a função de colagem) tal que X é homeomorfo a $A \sqcup D^n / \sim$ onde $\varphi(p) \in A \sim p \in \mathbb{S}^{n-1} = \partial D^n$.

19. Seja X um espaço topológico, e $A \subset X$ um subespaço. Mostre que existe uma retração $r : X \to A$ se e somente se para todo espaço Y e toda aplicação contínua $f : A \to Y$ existe uma extensão contínua $\tilde{f} : X \to Y$.

20. Mostre que $\mathbb{R}^n - \mathbb{R}^k$ é homotopicamente à $\mathbb{S}^{n-k-1}$.

21. Seja X um espaço conexo por arcos e $x \in X$. Mostre que o espaço

    $$P(X, x) = \{\alpha : I \to X : \alpha(0) = x\}$$

    é contrátil.

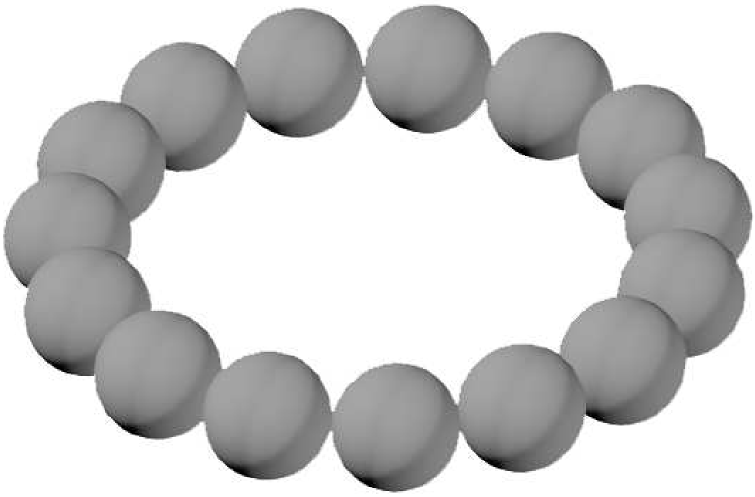


Figura 6: Colar de Pérolas.

22. Considere os seguintes grupos clássicos:

$$GL(n,\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R}) : \det A \neq 0\}$$
$$GL^+(n,\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R}) : \det A > 0\}$$
$$O(n,\mathbb{R}) = \{A \in GL(n,\mathbb{R}) : < Au, Av > = < u, v >\}$$
$$SO(n,\mathbb{R}) = \{A \in O(n,\mathbb{R}) : \det A = 1\}$$
$$U(n) = \{A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C}) : << Au, Av >> = << u, v >>\}$$
$$SU(n) = \{A \in U(n) : \det A = 1\},$$

onde $< \ , \ >$ denota o produto escalar usual de $\mathbb{R}^n$, e $<< \ , \ >>$ denota o produto escalar hermiteano usual de $\mathbb{C}^n$.

Mostre que:

(a) $O(n,\mathbb{R})$ é homotopicamente equivalente à $GL(n,\mathbb{R})$. DICA: pense no processo de ortogonalização de Gram-Schmidt.

(b) $SO(n,\mathbb{R})$ é homotopicamente equivalente à $GL^+(n,\mathbb{R})$.

(c) $SO(n,\mathbb{R})$ é compacto, mas $GL^+(n,\mathbb{R})$ não é compacto.

(d) $SU(2)$ é homeomorfo à $\mathbb{S}^3$ e portanto é simplesmente conexo.

(e) $\mathbb{S}^3$ admite 3 campos de vetores X_1, X_2, X_3 que são linearmente independentes em todos os pontos.

(f) Existe um recobrimento de $SU(2)$ em $SO(3)$. Calcule o grupo fundamental de $SO(3)$.

(g) Mostre que $SO(3)$ é homeomorfo a $\mathbb{RP}^3$

(h) $U(n)$ é conexo por caminhos, mas $O(n, \mathbb{R})$ não é conexo.

23. Seja $n \geq 2$, e $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^2$ a projeção nas primeiras duas coordenadas (i.e., $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}^{n-2}$, e $\pi(u, v) = u$). Mostre que se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^2$ é uma função suficientemente pequena, então existe $x \in \mathbb{R}^n$, tal que $\pi(x) + f(x) = 0$ (em outras palavras, mostre que existe $\varepsilon > 0$ tal que para toda função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^2$ com $||f(y)|| < \varepsilon$ para todo $y \in \mathbb{R}^n$, existe $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $\pi(x) + f(x) = 0$).

Dica: Assuma que $\pi(x) + f(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Escreva $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}^{n-2}$, e para cada $v \in \mathbb{R}^{n-2}$ considere a aplicação

$$g_v : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1, \quad g_v(u) = \frac{u + f(u, v)}{||u + f(u, v)||}.$$

Mostre que g_v é ao mesmo tempo homotópico à identidade e à uma aplicação constante. Utilize o exercício anterior.

24. Um H-**grupo**, ou grupo a menos de homotopia é um espaço pontuado (K, k_0) munido de duas aplicações

$$\mu : (K, k_0) \times (K, k_0) \longrightarrow (K, k_0), \quad \iota : (K, k_0) \longrightarrow (K, k_0),$$

tal que todos os axiomas de um grupo valem para o "produto"μ, a "inversa"ι e a "identidade"k_0 a menos de homotopia

(a) Escreva uma definição precisa de um H-grupo, i.e., escreva todas as funções que devem ser homotópicas na definição de um H-grupo.

(b) Mostre que $(\Omega(Y, y_0), c_{y_0})$ é um H-grupo para qualquer espaço (Y, y_0).

(c) Mostre que se (K, k_0) é um H-grupo, então para qualquer espaço (X, x_0), o conjunto

$$[(X, x_0), (K, k_0)]$$

tem uma estrutura de grupo com multiplicação

$$([f] \cdot [g]) = [\mu \circ (f, g) \circ \Delta], \text{ onde } \Delta : X \to X \times X, \quad x \mapsto (x, x),$$

inversa dada por

$$[f]^{-1} = [\iota \circ f],$$

e identidade dada pela classe de homotopia da apicação constante igual a k_0.

(d) Conclua que $\pi_1(X, x_0)$ é um grupo (use o exercício 8).

(e) Mostre que o grupo fundamental de um H-grupo é sempre abeliano.

3 π_1, Recobrimento e van Kampen

25. Dados dois caminhos γ_1 e γ_2 de p à q em X, mostre que os homomorfismos associados

$$A_{\gamma_i} : \pi_1(X,p) \to \pi_1(X,q)$$

coincidem ($A_{\gamma_1} = A_{\gamma_2}$) se e somente se $[\gamma_1 * \gamma_2^{-1}]$ pertence ao centro de $\pi_1(X,p)$ (i.e., comuta com todos os elementos).

26. Mostre que $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ não são homeomorfos.

27. Dê um exemplo de uma função sobrejetora (respectivamente injetora) contínua de X em Y, tal que $f_\sharp : \pi_1(X,p) \to \pi_1(Y,q)$ não é sobrejetora (respectivamente injetora).

28. Mostre que uma retração sempre induz uma aplicação sobrejetora entre os grupos fundamentais.

29. Seja $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ e considere a aplicação

$$f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2, \quad f(e^{2\pi i x}, e^{2\pi i y}) = (e^{2\pi i(nx+my)}, e^{2\pi i(px+qy)}),$$

com $m, n, p, q \in \mathbb{Z}$.

   (a) Determine a aplicação induzida no grupo fundamental.

   (b) Mostre que f é homeomorfismo se e somente se é equivalência de homotopia.

   (c) Depermine para quais valores de m, n, p, q que f é um homeomorfismo.

30. (a) Mostre que existe um recobrimento do Torus $\mathbb{T}^2$ na garrafa de Klein K.

   (b) Mostre que K pode ser obtido de $\mathbb{R}^2$ como quociente por uma ação propriamente descontnua de um grupo.

   (c) Calcule o grupo fundamental de K.

31. Mostre que um recobrimento conexo $P : E \to B$ de um espaço simplesmente conexo B é um homeomorfismo.

32. Mostre que se $\tilde{B}$ é um recobrimento simplesmente conexo de um espaço B, e se E é um recobrimento (conexo) qualquer de B, então existe um recobrimento $p : \tilde{B} \to E$.

33. A esfera $\mathbb{S}^n$ pode ser obtida de $\mathbb{R}^n$ como quociente por uma ação propriamente descontínua de um grupo G? E o espaço projetivo real $\mathbb{P}^n$?

34. Seja $f_n : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ o recobrimento de n folhas $f_n(z) = z^n$. Decida para quais valores de m e n existe um levantamento de $f_m : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ para o recobrimento f_n (veja o diagrama abaixo).

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{S}^1 \arrow[d, "f_n"] \\
\mathbb{S}^1 \arrow[ur] \arrow[r, "f_m"'] & \mathbb{S}^1
\end{tikzcd}$$

35. Seja M uma variedade topológica de dimensão n.

   (a) Suponha que G age propriamente descontinuamente em M e satisfaz a seguinte propriedade adicional: se $x, x' \in M$ não estão na mesma órbita de G, então existe uma vizinhança U de x e uma vizinhança U' de x' tais que $U \cap U' = \emptyset$. Mostre que M/G é uma variedade topológica de dimensão n.

   (b) Mostre que a condição adicional acima é necessária.

   (c) Mostre que se G é um grupo finito, então a condição adicional acima é automaticamente satisfeita.

   (d) Mostre que se G é um grupo finito que age livremente em M, então a ação é propriamente descontínua.

   (e) Mostre que se $p : E \to M$ é um recobrimento, então E é variedade topológica de dimensão n.

36. Encontre um recobrimento simplesmente conexo, e calcule o grupo fundamental dos seguntes espaços.

   (a) $X =$ colar de n pérolas (figura 7). Aqui X é o espaço obtido de n esferas ($n \geq 3$), $\mathbb{S}^2_1, \ldots, \mathbb{S}^2_n$, tomando dois pontos distintos p_i e q_i em cada uma delas identificando $p_i \in \mathbb{S}^2_i$ com um de $q_{i+1} \in \mathbb{S}^2_{i+1}$ (para $i < n$), e $p_n \in \mathbb{S}^2_n$ com $q_1 \in \mathbb{S}^2_1$.

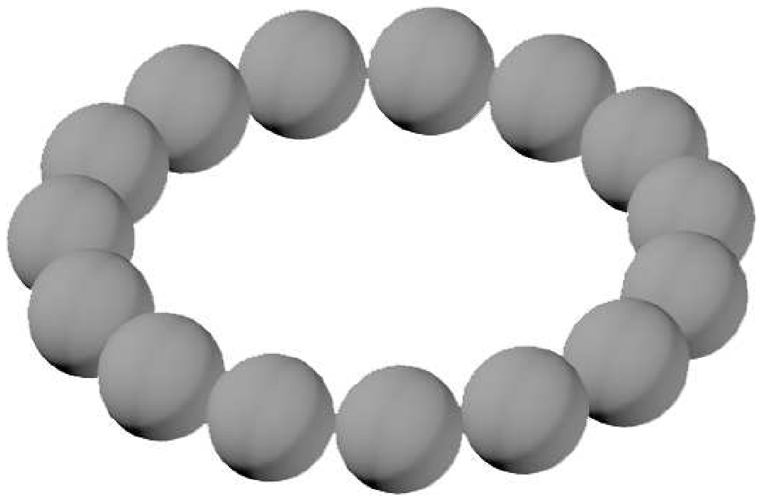


Figura 7: Colar de Pérolas.

   (b) X é um torus com quatro discos preenchidos (figura 8).

Dica: Pense no recobrimento $p : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$.

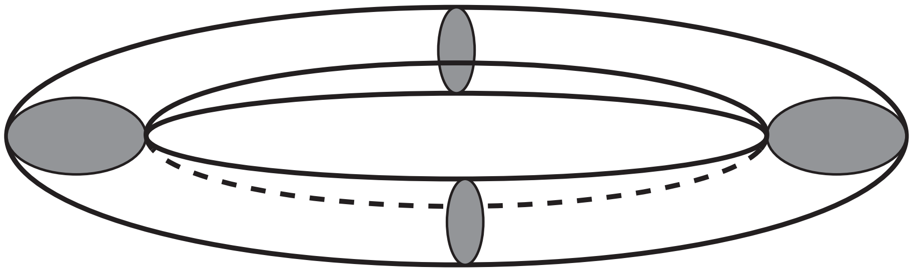


Figura 8: Torus com quatro discos preenchidos.

37. Mostre que existe um recobrimento $p : \mathbb{T}_3 \to \mathbb{T}_2$ do 3-Torus $\mathbb{T}_3 = \mathbb{T}\#\mathbb{T}\#\mathbb{T}$ no 2-Torus $\mathbb{T}_2 = \mathbb{T}\#\mathbb{T}$. (Dica: procure uma ação propriamente descontínua de $\mathbb{Z}_2$ em $\mathbb{T}_3$). Observação: Note que isso mostra que $\pi_1(\mathbb{T}_3, x)$ e um subgrupo de $\pi_1(\mathbb{T}_2, y)$. Isto pode ser um pouco anti-intuitivo j que $\mathbb{T}_3$ "tem mais buracos que" $\mathbb{T}_2$.

38. Utilizando o fato que toda variedade suave é uma pseudo-variedade, mostre que toda variedade suave compacta tem grupo fundamental finitamente gerado.

39. Sejam M_1 e M_2 duas variedades de dimensão n. Mostre que se $n \geq 3$, então

$$\pi_1(M_1\#M_2, [x]) \simeq \pi_1(M_1, x) * \pi_1(M_2, y).$$

O que se pode dizer quando $n = 2$?

40. Calcule o grupo fundamental dos seguintes espaços:
    (a) $X = \mathbb{R}^3 - \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0, \text{ or } y = 0, \text{ or } z = 0\}$, i.e., o espaço obtido removendo os três eixos de $\mathbb{R}^3$.
    (b) O espaço projetivo real de dimensão 3

$$\mathbb{P}^3 = \{l \subset \mathbb{R}^4 : l \text{ é uma reta pela origem}\}.$$

    (c) O produto wedge de dois Tori (figura 9).

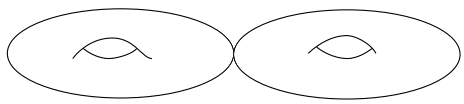


Figura 9: $\mathbb{T} \vee \mathbb{T}$.

    (d) O espaço X que consiste de uma esfera, uma haste (1-dimensional) que passa pelos polos norte e sul da esfera e conecta em um cilindro, conforme indicado na figura 10.
    (e) O espaço quociente obtido identificando os vértices de um quadrado, i.e., $[0, 1] \times [0, 1]/A$, onde

$$A = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}.$$

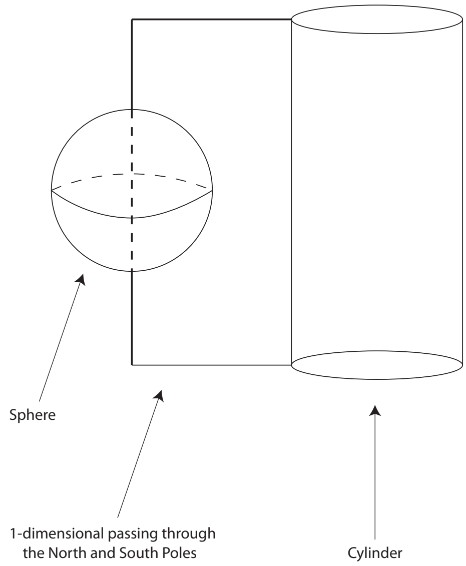


Figura 10: Exercise 5(d)

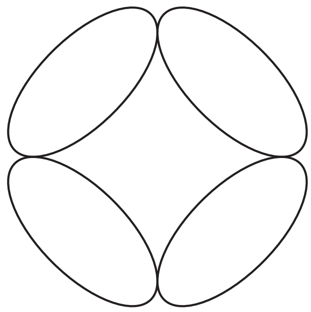


Figura 11: Corrente de 4 círculos.

(f) Uma corrente de quatro círculos, obtido de quatro cópias de $\mathbb{S}^1$ e identificando elas dois a dois conforme a figura 11.

(g) O colar de pérolas com cordão, i.e., o colar de n pérolas da lista de exercícios anterior junto com um $\mathbb{S}^1$ que passa por dentro das esferas intersectando cada esfera exatamente nos pontos que são usados para colar uma esfera na outra. De forma mais abstrata, se o colar de pérolas é descrito como o espaço X obtido de n esferas ($n \geq 3$), $\mathbb{S}^2_1, \ldots, \mathbb{S}^2_n$, tomando dois pontos distintos p_i e q_i em cada uma delas identificando $p_i \in \mathbb{S}^2_i$ com um de $q_{i+1} \in \mathbb{S}^2_{i+1}$ (para $i < n$), e $p_n \in \mathbb{S}^2_n$ com $q_1 \in \mathbb{S}^2_1$ (figura 7), então o colar de pérolas com cordão é

$$(X \sqcup \mathbb{S}^1)/\sim,$$

onde $[p_k] \in X \sim e^{\frac{2k\pi i}{n}} \in \mathbb{S}^1$, com $k = 1, \ldots, n$.

41. Seja $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

(a) Encontre uma ação propriamente descontínua de $\mathbb{Z}_n$ em $\mathbb{S}^3$.

(b) Mostre que $L_n = \mathbb{S}^3/\mathbb{Z}_n$ é uma variedade topológica.

(c) Seja $Cil(L_n) = L_n \times [0, 1]$. Calcule $\pi_1(Cil(L_n) - \{p\}, x)$, onde p é um ponto de $Cil(L_n)$ que **NÃO** pertence à fronteira $L_n \times \{0\} \cup L_n \times \{1\}$.

42. Mostre que existe um homomorfismo injetor $\pi(\mathbb{T}_{11}, x) \to \pi(\mathbb{T}_3, p)$, onde $\mathbb{T}_g$ a soma conexa de g Tori. (DICA: considere $\mathbb{T}_{11}$ como na figura 12).

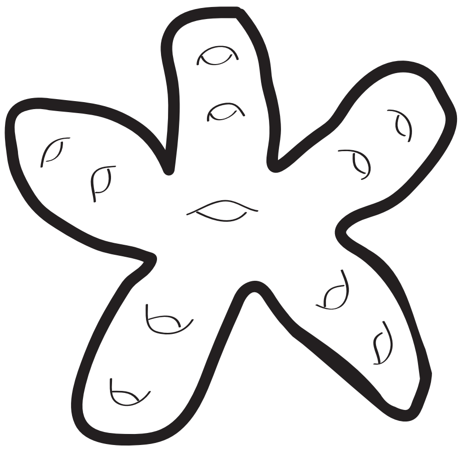


Figura 12: $\mathbb{T}_{11}$.

43. Seja X um espaço topológico. A suspensão de X é definida por

$$\Sigma X = (X \times [-1,1])/\sim,$$

onde $\sim$ é a menor relação de equivalência tal que $(x,1) \sim (y,1)$, e $(x,0) \sim (y,0)$ para todo $x, y \in X$. (Este espaço também é chamado de cone duplo sobre X)

(a) Mostre $\Sigma\mathbb{S}^n \simeq \mathbb{S}^{n+1}$ para todo $n \geq 0$.

(b) Mostre que se X é conexo por arcos, então ΣX é simplesmente conexo.

(c) Mais geralmente, qual a relação entre o número de componentes conexas por arcos de X e $\pi_1(\Sigma X, x)$?

44. Sejam M, N, X, Y variedades topológicas de dimensão n. Decida se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas.

1. $M\#X \simeq M\#Y \implies \chi(X) = \chi(Y)$, onde $\chi(X)$ denota o nmero de Euler de X.
2. $\pi_1(M\#N, x) = \pi_1(M, x) * \pi_1(N, y)$.
3. Se $\dim M \geq 3$ então $\pi_1(M - \{p\}), x) \simeq \pi_1(M, x)$.

45. Seja $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

(a) Encontre uma ação propriamente descontínua de $\mathbb{Z}_n$ em $\mathbb{S}^3$.

(b) Mostre que $L_n = \mathbb{S}^3/\mathbb{Z}_n$ é uma variedade topológica.

(c) Seja $Cil(L_n) = L_n \times [0,1]$. Calcule $\pi_1(Cil(L_n) - \{p\}, x)$, onde p é um ponto de $Cil(L_n)$ que **NÃO** pertence à fronteira $L_n \times \{0\} \cup L_n \times \{1\}$.

46. Calcule o grupo fundamental dos seguintes espaços:

(a) $X = \mathbb{R}^3 - \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0 \text{ e } y = 0;\ \text{ou } y = 0 \text{ e } z = 0;\ \text{ou } x = 0 \text{ e } z = 0\}$, i.e., o espaço obtido removendo os três eixos de $\mathbb{R}^3$.

(b) O espaço projetivo real de dimensão 3

$$\mathbb{P}^3 = \{l \subset \mathbb{R}^4 : l \text{ é uma reta pela origem}\}.$$

(c) O colar do Hippie Matemático composta por $n+1$ "missangas": uma esfera $\mathbb{S}^2$, um Torus $\mathbb{T}^2$, um 2-Torus $\mathbb{T}^2\#\mathbb{T}^2$, ... , um n-Torus $\mathbb{T}^2_n = \mathbb{T}^2\#\mathbb{T}^2\#\cdots\#\mathbb{T}^2$ (n-vezes).

47. Seja $f_m : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ a aplicação $f_m(z) = z^m$, com $m \in \mathbb{N}$. Seja $p : \mathbb{S}^n \to \mathbb{P}^n$ a aplicação quociente (pela relação de equivalência que identifica os pontos antípodas da esfera). Decida se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas. Dê uma prova <u>curta</u> ou um contra-exemplo.

(a) (1 ponto) Se $n \geq 2$, então toda aplicação $F : \mathbb{P}^n \to \mathbb{S}^1$ admite um levantamento para o recobrimento $f_m : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$.

(b) (1 ponto) Se $n \geq 2$, e $\phi : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{P}^n$ admite um levantamento $\tilde{\phi} : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^n$, então ϕ se extende a uma aplicação do disco $\bar{\phi} : D^2 \to \mathbb{P}^n$.

48. Calcule o grupo fundamental dos seguintes espaços:

   (a) (1 ponto) $X = \mathbb{R}^n - \mathbb{R}^k$, onde identificamos $\mathbb{R}^k$ com o conjunto

   $$\mathbb{R}^k = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_{k+1} = x_{k+2} = \cdots = x_n = 0\} \subset \mathbb{R}^n,$$

   onde $0 \leq k < n$.

   (b) (1 ponto) O colar X da figura 13, obtido da seguinte forma: Tome 3 esferas $\mathbb{S}^2_i$, com $i = 1, 2, 3$, e 2 círculos $\mathbb{S}^1_1$ e $\mathbb{S}^1_2$. Sejam N_i e S_i os polos norte e sul de $\mathbb{S}^2_i$, x_1, x_2, x_3 as raízes cúbicas da unidade em $\mathbb{S}^1_1$, e y_1, y_2, y_3 as raízes cúbicas da unidade em $\mathbb{S}^1_2$. Então

   $$X = (\mathbb{S}^2_1 \sqcup \mathbb{S}^2_2 \sqcup \mathbb{S}^2_3 \sqcup \mathbb{S}^1_1 \sqcup \mathbb{S}^1_2)/ \sim,$$

   onde $\sim$ é a menor relação de equivalencia tal que

   $$x_i \sim N_i, \text{ e } y_i \sim S_i \text{ para todo } i = 1, 2, 3.$$

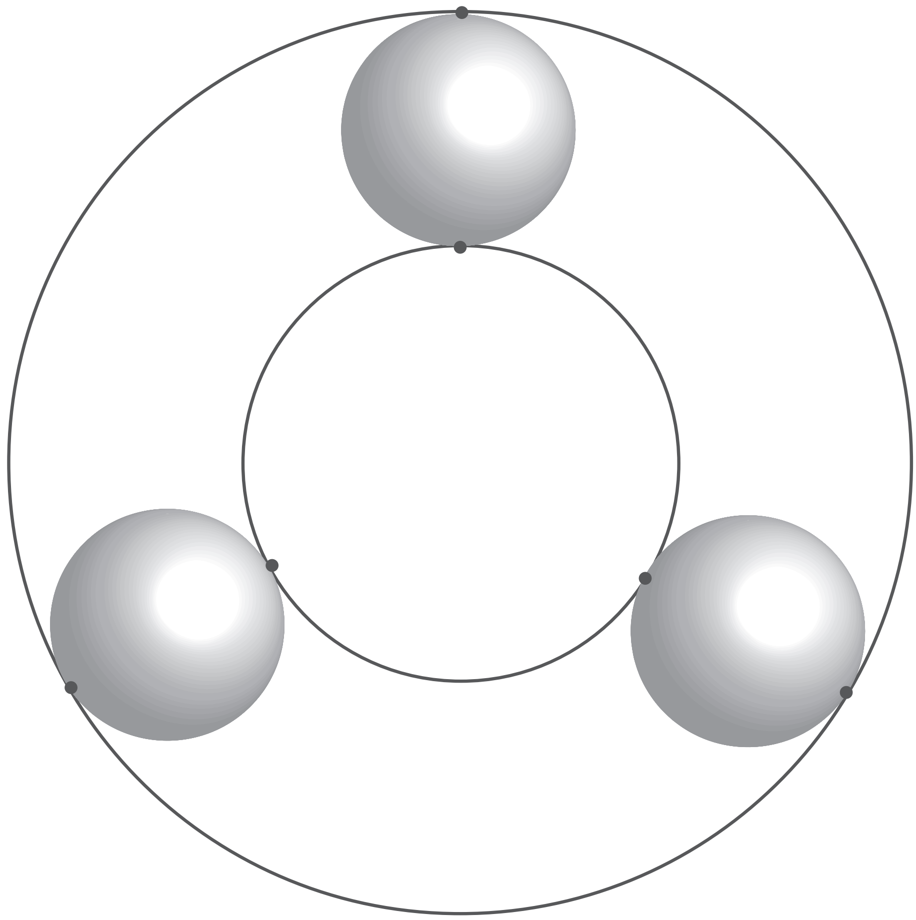


Figura 13: Colar X do Exerccio 6.(b)