Aula 9: Recobrimentos

Ideia: Dado um espaço topológico X, considerar/construir um espaço E com uma aplicação $p: E \to X$ tal que

i) $\forall \gamma: I \to X$, $\forall e \in p^{-1}(\gamma(0))$, $\exists!\ \tilde{\gamma}_e: I \to E$, $\begin{cases} \tilde{\gamma}(0) = e \\ p \circ \tilde{\gamma} = \gamma \end{cases}$

ii) Se $\gamma \sim \gamma'$ rel $\partial I \Rightarrow \tilde{\gamma}_e \sim \tilde{\gamma}'_e$ rel ∂I, e em particular $\tilde{\gamma}_e(1) = \tilde{\gamma}'_e(1)$ (Uma forma de distinguir entre classes de homotopia)

Def: Uma aplicação $p: E \to X$ é um recobrimento se $\forall x \in X$, existe $U \subset X$ viz. aberta tal que

$$p^{-1}(U) = \coprod_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda \quad , \quad V_\lambda \subset E \text{ abertos} , \ \Lambda \neq \emptyset$$

tal que $p|_{V_\lambda}: V_\lambda \to U$ é homeomorfismo $\forall \lambda \in \Lambda$

Exemplos:

1) $p: \mathbb{R} \to S^1$, $p(s) = e^{2\pi i s}$

Dado $x = e^{2\pi i s_0} \in S^1$, Tomando $U = S^1 - \{-x\}$ temos que

$$p^{-1}(U) = \coprod_{k \in \mathbb{Z}} V_k$$

$V_k = \left(s_0 + \frac{2k-1}{2}, s_0 + \frac{2k+1}{2}\right)$, $p|_{V_k}: V_k \to U$ é homeo.

2) $p: S^n \to \mathbb{R}P^n = S^n/_{x \sim -x}$

$x \longmapsto [x]$

 $\xrightarrow{p}$ $\mathbb{R}P^2$

$[x]$

Prop: Se $p: E \to X$ é recobrimento e X é conexo

$\Rightarrow \# p^{-1}(x_0) = \# p^{-1}(x_1) \quad \forall x_0, x_1 \in X$ (Λ Não depende de x)

Dem: Seja $A \subset X$, $A = \{x \in X \mid \# p^{-1}(x) = \# p^{-1}(x_0)\}$

1. $A \neq \emptyset$ pois $x_0 \in A$
2. A é aberto: Seja $x_1 \in A$ e seja $U \subset X$ uma viz. de x_1 tal que $p^{-1}(U) = \coprod_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$, $p: V_\lambda \to U$ homeo

$\Rightarrow \forall x \in U$, $p^{-1}(x) \xleftrightarrow{\text{bij}} \Lambda \Rightarrow \# p^{-1}(x) = \# p^{-1}(x_1) = \# p^{-1}(x_0)$

$\Rightarrow U \subset A$.

3. A é fechado: (Mesmo Argumento da acima)

Se $x_1 \in X - A$, U viz "unif. recoberta"

$p^{-1}(U) = \coprod_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$, $p|_{V_\lambda} : V_\lambda \xrightarrow{\cong} U$

$\Rightarrow U \subset X - A$

$\Rightarrow X - A$ aberto $\Rightarrow A$ fechado

Logo, $X = A$ e $\# p^{-1}(x) = \# p^{-1}(x_0) \quad \forall x \in X$ ■

A PARTIR DE AGORA VAMOS ASSUMIR QUE X É CONEXO

Terminologia: $p: E \to X$ recobrimento

- E é um recobrimento de X, ou E é o espaço total do recobrimento
- $U \subset X$, $p^{-1}(U) = \coprod_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$, $p|_{V_\lambda} \cong$: U é aberto uniformemente recoberto

- V_λ é uma placa do recobrimento
- $|\Lambda|$ = número de folhas do recobrimento

<u>OBS</u>: $p: E \to X$ é um exemplo de um fibrado localmente trivial (com fibra discreta):

- $\pi: P \to B$ é um <u>fibrado localmente trivial com fibra F</u> se $\forall b \in B$, $\exists\, U \subset B$ viz. e um homeomorfismo $\tau_U : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times F$ tal que

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[r, "\tau_U"] \arrow[dr, "\pi"'] & U \times F \arrow[d, "pr_1"] \\ & U \end{tikzcd}$$

<u>Propriedades de Levantamento:</u>

<u>Teorema</u>: Seja $p: E \to X$ um recobrimento. Seja $\gamma: I \to X$ e $e \in p^{-1}(\gamma(0))$. Então existe um único $\tilde{\gamma}_e : I \longrightarrow E$ tal que

$$\begin{cases} \tilde{\gamma}_e(0) = e \\ p \circ \tilde{\gamma}_e = \gamma \end{cases} \qquad \begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ I \arrow[ur, dashed, "\tilde{\gamma}_e"] \arrow[r, "\gamma"'] & X \end{tikzcd}$$

<u>Dem</u>: Pelo Lema de Lebesgue, $\exists\; 0 = a_0 < a_1 < \dots < a_k = 1$ tal que $\gamma([a_i, a_{i+1}]) \subset U_i \subset X$ onde U_i é aberto uniformemente recoberto.

- Começando com U_0, seja $V_0 \subset E$ tal que $e \in V_0$, $p: V_0 \xrightarrow{\cong} U_0$

Defina $\tilde{\gamma}_e\big|_{[0,a_1]} : [0, a_1] \longrightarrow E$, $\tilde{\gamma}_e\big|_{[0,a_1]} = p\big|_{V_0}^{-1} \circ \gamma\big|_{[0,a_1]}$

- Suponha que já definimos $\tilde{\gamma}_e|_{[a_{i-1},a_i]}$ e seja $V_i \subset E$ tal que $\tilde{\gamma}_e(a_i) \in V_i$, $p: V_i \xrightarrow{\cong} U_i$. Defina

$$\tilde{\gamma}_e\Big|_{[a_i,a_{i+1}]} = p\Big|_{V_i}^{-1}\left(\gamma\big|_{[a_i,a_{i+1}]}\right)$$

$\Rightarrow$ $\tilde{\gamma}_e(t) = \tilde{\gamma}_e\Big|_{[a_i,a_{i+1}]}(t)$ se $a_i \leq t \leq a_{i+1}$ é um levantamento de γ começando em e. A unicidade de $\tilde{\gamma}_e$ segue da unicidade em cada passo acima $\left(\begin{array}{l} p: V_i \to U_i \text{ é homeo} \\ + \ \tilde{\gamma}_e \text{ é contínua} \end{array} \right)$

$\blacksquare$

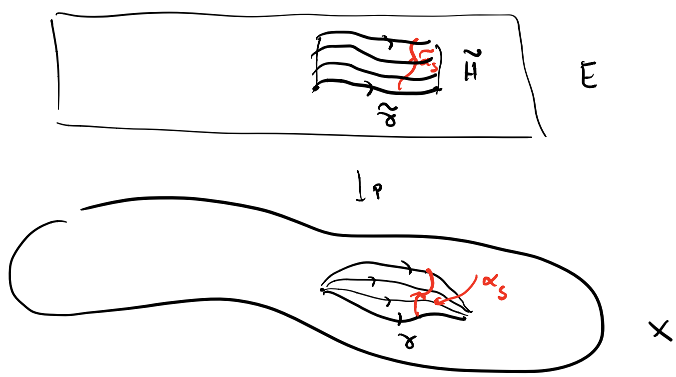
<u>Teorema</u> (Levantamento de Homotopias)

Seja $p: E \to X$ um recobrimento e $H: I \times I \to X$ uma homotopia começando em $H(-,0) = \gamma : I \to X$. Dado um levantamento $\tilde{\gamma}: I \to E$ de γ, existe um único $\tilde{H}: I \times I \to E$ tal que $\begin{cases} \tilde{H}(-,0) = \tilde{\gamma} \\ p \circ \tilde{H} = H \end{cases}$

(Em forma de diagrama:)

$$\begin{tikzcd} I \times \{0\} \arrow[r, "\tilde{\gamma}"] \arrow[d, hook] & E \arrow[d, "p"] \\ I \times I \arrow[r, "H"'] \arrow[ur, dashed, "\exists!\, \tilde{H}"] & X \end{tikzcd}$$

<u>Dem</u>: Defina $\tilde{H}(s,t) = \tilde{\alpha}_{\tilde{\gamma}(s)}(t)$ onde $\tilde{\alpha}_{\tilde{\gamma}(s)} : I \to E$ é o levantamento de $\begin{array}{l} \alpha_s : I \to X \\ t \mapsto \alpha_s(t) = H(s,t) \end{array}$ começando em $\tilde{\gamma}(s)$



- A unicidade segue da unicidade do levantamento de caminhos:

Se $\tilde{H}: I\times I \to E$ satisfaz $\begin{cases} \tilde{H}(s,0) = \tilde{\gamma}(s) \\ p\circ\tilde{H}(s,t) = H(s,t) \end{cases}$

$\Rightarrow$ $\begin{array}{l} \tilde{H}_s : I \to E \\ t \mapsto \tilde{H}(s,t) \end{array}$ é um levantamento de $\begin{array}{l} \alpha_s : I \to X \\ t \mapsto H(s,t) \end{array}$

começando em $\tilde{\gamma}(s)$ $\Rightarrow$ $\tilde{H}_s(t) = \tilde{\alpha}_{\tilde{\gamma}(s)}(t)$ $\forall t$.

- Continuidade segue da unicidade:

- Seja $(s_0,t_0)\in I\times I$ e $W\subset I\times I$ viz. de (s_0,t_0) tal que $H(W)\subset U$ onde é aberto uniformemente recoberto

- Seja $V_\lambda \subset E$ tal que $\tilde{H}(s_0,t_0)\in V_\lambda$, $p: V_\lambda \to U$ é homeo

$\Rightarrow$ $\tilde{H}\big|_W = p\big|_{V_\lambda}^{-1} \circ H\big|_W$ contínua!

$\Rightarrow$ $\tilde{H}$ é contínua ∎

<u>Corolário</u>: Seja $p: E\to X$ recobrimento e $\gamma, \gamma': I \to X$, $\begin{cases} \gamma(0) = \gamma'(0) \\ \gamma(1) = \gamma'(1) \end{cases}$ Seja $e\in p^{-1}(\gamma(0))$. Então

$$\gamma \sim \gamma' \text{ rel } \partial I \iff \tilde{\gamma}_e \sim \tilde{\gamma}'_e \text{ rel } \partial I$$

Dem: Seja $\gamma \sim_H \gamma'$ rel ∂I e $\tilde{H}: I\times I \to E$ o levantamento de H tal que $\tilde{H}(s,0) = \tilde{\gamma}_e(s)$. Temos que mostrar que

1) $\tilde{H}(0,t) = e \quad \forall t$
2) $\tilde{H}(1,t) = \tilde{\gamma}_e(1) \quad \forall t$
3) $\tilde{H}(s,1) = \tilde{\gamma}'_e(s) \quad \forall s$

1) $\tilde{H}_0 : I \to E$, $\tilde{H}_0(t) = \tilde{H}(0,t)$ é uma curva contínua em $p^{-1}(\gamma(0))$ tal que $\tilde{H}_0(0) = e$. Mas $p^{-1}(\gamma(0))$ é discreto $\Rightarrow \tilde{H}_0(t) = e \ \forall t$

2) $\tilde{H}_1 : I \to E$, $\tilde{H}_1(t) = \tilde{H}(1,t)$ é uma curva contínua em $p^{-1}(\gamma(1))$ tal que $\tilde{H}_1(0) = \tilde{\gamma}_e(1)$. Mas $p^{-1}(\gamma(1))$ é discreto $\Rightarrow \tilde{H}_1(t) = \tilde{\gamma}_e(1) \ \forall t$

3) $\tilde{H}(\cdot,1)$ é um levantamento de $\tilde{\gamma}'_e$ tal que $\tilde{H}(0,1) = e = \tilde{\gamma}'_e(0)$. Por unicidade, $\tilde{H}(\cdot,1) = \tilde{\gamma}'_e$

Reciprocamente, se $\tilde{\gamma}_e \sim_{\tilde{H}} \tilde{\gamma}'_e$ rel $\partial I \Rightarrow \gamma \sim_H \gamma'$ rel ∂I onde $H : I\times I \to X$, $H(s,t) = p(\tilde{H}(s,t))$ ∎

(*) **Corolário**: Seja $p: E \to X$ recobrimento e $\gamma, \gamma' : I \to X$, $\begin{cases} \gamma(0) = \gamma'(0) \\ \gamma(1) = \gamma'(1) \end{cases}$ seja $e \in p^{-1}(\gamma(0))$. Então

$$\gamma \sim \gamma' \text{ rel } \partial I \implies \tilde{\gamma}_e(1) = \tilde{\gamma}'_e(1)$$ ∎

Exercício: Mostre que se X é 1-conexo e $\gamma, \gamma' : I \to X$ são tais que $\gamma(0) = \gamma'(0)$, $\gamma(1) = \gamma'(0)$ então $\gamma \sim \gamma'$ rel ∂I (Cuidado para que a homotopia seja rel ∂I !!!)

Corolário: Se $p: E \to X$ é um recobrimento com E 1-conexo, então

$$p^{-1}(x) \xleftrightarrow{\text{bijeção}} \pi_1(X,x)$$

Dem: Seja $\phi_e : \pi_1(X, x) \longrightarrow p^{-1}(x)$ $\quad (e \in p^{-1}(x))$

$[\gamma] \longmapsto \tilde{\gamma}_e(1)$

Pelo corolário (*) ϕ_e está bem definido. Pelo Exercício, ϕ_e é injetor. Vamos mostrar que ϕ_e é sobrejetor.

Seja $e' \in p^{-1}(x)$. E conexo por caminhos $\Rightarrow$ $\exists\, \alpha : I \to E$ $\alpha(0) = e$, $\alpha(1) = e'$. Seja $\gamma = p \circ \alpha$. Note que

$\gamma(0) = p(\alpha(0)) = p(e) = x = p(e') = p(\alpha(1)) = \gamma(1)$

$\Rightarrow$ γ é um laço.

Além disso, $\tilde{\gamma}_e = \alpha$ (por unicidade do levantamento)

$\Rightarrow$ $\phi_e[\gamma] = \tilde{\gamma}_e(1) = \alpha(1) = e'$ $\blacksquare$

Aplicação: • $\pi_1(S^1, 1) \xleftrightarrow{\text{bij}} \mathbb{Z}$ (Na próxima aula vamos mostra que é iso de grupos)

Fato: $\pi_1(S^n, p) = \{e\}$ $\forall n \geq 2$

• $\pi_1(\mathbb{RP}^n, x) = \mathbb{Z}_2$