Aula 8:

Lembre que

$$\pi_1(X,x) = \{ [\alpha] \mid \alpha \in \Omega(X,x) \}$$

onde $[\alpha] = [\beta] \iff \alpha \sim \beta \text{ rel } \partial I$

Grupo fundamental de X com ponto base x

- $[\beta][\alpha] = [\beta * \alpha]$ $\quad\quad$ $\beta * \alpha(s) = \begin{cases} \alpha(2s) & 0 \leq s \leq 1/2 \\ \beta(2s-1) & 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases}$
- $e = [c_x]$
- $[\alpha]^{-1} = [\bar{\alpha}]$, $\bar{\alpha}(s) = \alpha(1-s)$

- $\pi_1 : TOP^* \longrightarrow Grp$ é um Funtor:

$$f : (X,x) \longrightarrow (Y,y) \rightsquigarrow \pi_1(f) = f_* : \pi_1(X,x) \longrightarrow \pi_1(Y,y)$$
$$[\alpha] \longmapsto [f \circ \alpha]$$

<u>Pergunta</u>: Seja $x_0, x_1 \in X$. Qual a relação entre $\pi_1(X,x_0)$ e $\pi_1(X,x_1)$?

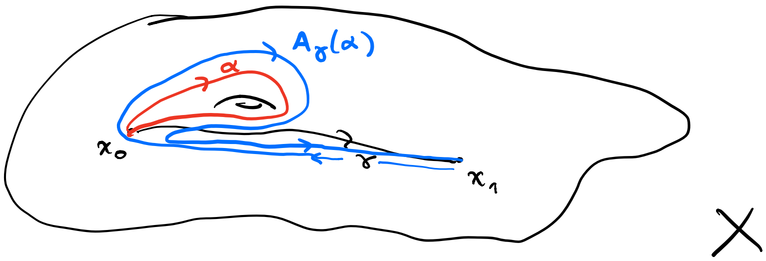
- Se x_0 e x_1 estão em componentes conexas por caminhos diferentes $\Rightarrow$ NÃO tem nenhuma relação

  ($\pi_1(X,x)$ só vê a componente conexa por caminhos de x)

- Suponha que X é conexo p/ caminhos (ou que (x_0 e x_1 estão na mesma componente conexa p/ caminhos)

- Se $\gamma : I \longrightarrow X$, $\gamma(0) = x_0$, $\gamma(1) = x_1$

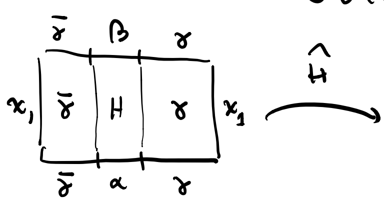
- γ induz $A_\gamma : \Omega(X,x_0) \longrightarrow \Omega(X,x_1)$
$$\alpha \longmapsto \gamma * \alpha * \bar{\gamma}$$



Lema: Se $\alpha, \beta \in \Omega(X, x_0)$, $\alpha \sim \beta \text{ rel } \partial I \Rightarrow A_\gamma(\alpha) \sim A_\gamma(\beta) \text{ rel } \partial I$

Dem: $\alpha \sim_H \beta \text{ rel } \partial I$

Seja $$\hat{H}(s,t) = \begin{cases} \bar{\gamma}(4s) & 0 \leq s \leq 1/4 \\ H(4s-1, t) & 0 \leq s \leq 1/2 \\ \gamma(2s-1) & 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases}$$



$\Rightarrow A_\gamma(\alpha) \sim_{\hat{H}} A_\gamma(\beta)$

Prop: $A_\gamma : \Omega(X, x_0) \longrightarrow \Omega(X, x_1)$ induz um isomorfismo
$\hat{A}_\gamma : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_1)$, $\hat{A}_\gamma([\alpha]) = [A_\gamma(\alpha)]$

Dem: $\hat{A}_\gamma$ está bem definido pelo lema.

- $\hat{A}_\gamma^{-1} = \hat{A}_{\bar{\gamma}}$:

exercício!

$$\hat{A}_{\bar{\gamma}} \circ \hat{A}_\gamma([\alpha]) = [\bar{\gamma} * \gamma * \alpha * \bar{\gamma} * \gamma] = [\alpha]$$
$$\hat{A}_\gamma \circ \hat{A}_{\bar{\gamma}}([\beta]) = [\gamma * \bar{\gamma} * \beta * \gamma * \bar{\gamma}] = [\beta]$$

∎

Corolário: Se X é conexo por caminhos então
$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1) \quad \forall x_0, x_1 \in X$$

Exercício: Mostre que

1. Se $\gamma, \gamma' : I \to X$, $\gamma(0) = x_0 = \gamma'(0)$, $\gamma(1) = x_1 = \gamma'(1)$,
$\gamma \sim \gamma'$ rel $\partial I \implies \hat{A}_\gamma = \hat{A}_{\gamma'}$

2. Se $\gamma, \gamma' : I \to X$ $\gamma(0) = x_0 = \gamma'(0)$, $\gamma(1) = x_1 = \gamma'(1)$,
Se $\pi_1(X, x_0)$ é abeliano $\implies$ $\pi_1(X, x_1)$ é abeliano e
$\hat{A}_\gamma = \hat{A}_{\gamma'}$.

3. Em geral, $\hat{A}_\gamma([\alpha])$ é conjugado à $\hat{A}_{\gamma'}([\alpha])$

- Homotopia relativa vs Homotopia Livre

Seja $\alpha \in \Omega(X, x)$. Podemos pensar em α como

$\hat{\alpha} : (S^1, 1) \longrightarrow (X, x)$:

$S^1 \cong I/\partial I$, $1 = [\partial I]$

Explicitamente
- $I/\partial I \longrightarrow S^1$, $[s] \longmapsto e^{2\pi i s}$
- $\hat{\alpha}(e^{2\pi i s}) = \alpha(s)$

Def: Dois laços $\alpha, \beta \in \Omega(X, x)$ são livremente homotópicos se são homotópicos como funções
$\hat{\alpha}, \hat{\beta} : S^1 \to X$

OBS: $\alpha \sim \beta$ rel $\partial I \iff \hat{\alpha} \sim \hat{\beta}$ rel $\{1\}$

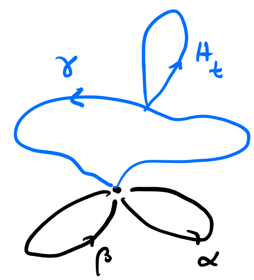
- α e β são livremente homotópicos $\overset{def}{\iff} \hat{\alpha} \sim \hat{\beta}$

Isso é mais fraco que $\alpha \sim \beta$ rel ∂I e mais forte que $\alpha \sim \beta$ (pois ao longo da homotopia, $H(-,t)$ é um laço $\forall t$, não necessariamente com base em x)

Prop: Se $\alpha, \beta \in \Omega(X,x)$ são livremente homotópicas $\Rightarrow [\alpha]$ e $[\beta]$ são conjugadas, i.e., $\exists\, [\gamma] \in \pi_1(X,x)$ tal que $[\beta] = [\gamma][\alpha][\gamma]^{-1}$

Dem: Seja $H : S^1 \times I \longrightarrow X$, $\quad H(p,0) = \hat{\alpha}(p)$
$\quad H(p,1) = \hat{\beta}(p)$

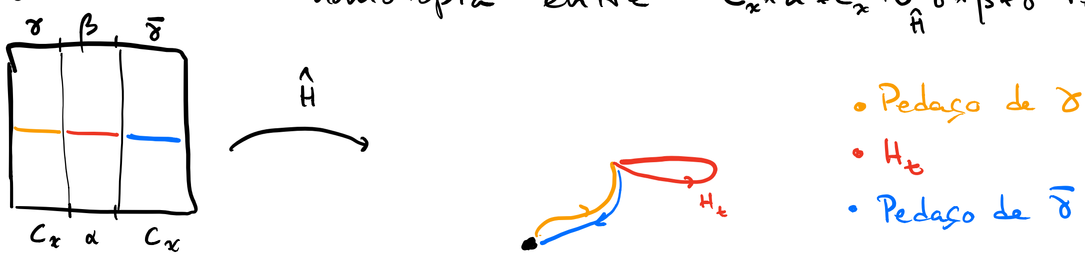
Seja $\gamma = H(1,-) : I \longrightarrow X$,



Note que $\cdot\ \gamma(0) = H(1,0) = \hat{\alpha}(1) = x$
$\cdot\ \gamma(1) = H(1,1) = \hat{\beta}(1) = x$

Ou seja $\gamma \in \Omega(X,x)$.

Vamos mostrar que $\bar{\gamma} * \beta * \gamma \sim \alpha$ rel ∂I. Para isso vamos construir uma homotopia entre $c_x * \alpha * c_x \underset{\hat{H}}{\sim} \bar{\gamma} * \beta * \gamma$ rel ∂I



Explicitamente:

$$\hat{H}(s,t) = \begin{cases} \gamma(4st) & 0 \le s \le 1/4 \\ H(e^{2\pi i(4s-1)}, t) & 1/4 \le s \le 1/2 \\ \gamma(2t(1-s)) & 1/2 \le s \le 1 \end{cases}$$

$$\hat{H}(s,0) = \begin{cases} x & 0 \le s \le 1/4 \\ \hat{\alpha}(e^{2\pi i(4s-1)}) & 1/4 \le s \le 1/2 \\ x & 1/2 \le s \le 1 \end{cases} = \begin{cases} x & 0 \le s \le 1/4 \\ \alpha(4s-1) & 1/4 \le s \le 1/2 \\ x & 1/2 \le s \le 1 \end{cases} = c_x * (\alpha * c_x)(s)$$

$$\hat{H}(s,1) = \begin{cases} \gamma(4s) & 0 \le s \le 1/4 \\ \beta(4s-1) & 1/4 \le s \le 1/2 \\ \bar{\gamma}(2s-1) & 1/2 \le s \le 1 \end{cases} = \bar{\gamma} * (\beta * \gamma)(s)$$

- $\hat{H}(0,t) = \gamma(0) = x$
- $\hat{H}(1,t) = \gamma(0) = x$ ∎

Corolário: Seja $\alpha \in \Omega(X,x)$. Então $[\alpha] = [c_x] \iff \alpha$ e c_x são livremente homotópicos.

Dem: $(\Rightarrow)$ $\alpha \sim c_x$ rel $\partial I \Rightarrow \hat{\alpha} \sim \hat{c}_x$ //

$(\Leftarrow)$ $\hat{\alpha} \sim \hat{c}_x \Rightarrow [\alpha] = [\gamma][c_x][\gamma]^{-1} = [\gamma][\gamma]^{-1} = [c_x]$ ∎

Def: X é 1-conexo se X é conexo por caminhos e $\pi_1(X,x) = \{e\}$ para algum $x \in X$ (e portanto $\forall x \in X$)

Exercício: Mostre que $X \sim Y \Rightarrow \pi_0(X) \cong \pi_0(Y)$ onde $\pi_0(X) = \{$comp. conexas p/ caminhos de $X\}$. Em particular, X contrátil $\Rightarrow$ X conexo p/ caminhos.

Prop: X contrátil $\Rightarrow$ X conexo p/ caminhos

Dem: Falta mostrar que $\pi_1(X,x) = \{e\}$.
Para isso, é suficiente mostrar que: $\forall \hat{\alpha} : (S^1, 1) \to (X,x)$, $\hat{\alpha} \sim c_x$.
Isso segue do último exercício da aula 6 ∎

<u>Teorema</u>: Seja $f:(X,x) \longrightarrow (Y,y)$ uma equivalência de homotopia. Então $f_*: \pi_1(X,x) \longrightarrow \pi_1(Y,y)$ é um isomorfismo.

<u>Dem</u>:

- Seja $f: X \longrightarrow Y$ equivalencia de homotopia com inversa homotópica $g: Y \longrightarrow X$

- Seja $x_0 \in X$, $y_0 = f(x_0)$, $x_1 = g(y_0)$

$$\Rightarrow \quad g \circ f : X \longrightarrow X, \quad g \circ f \sim Id_X, \quad g \circ f(x_0) = x_1$$

Note que x_0 e x_1 pertencem a mesma componente conexa por caminhos de X. De fato se $Id_X \sim_H g \circ f$

$\Rightarrow \quad \gamma = H(x_0, -)$ satisfaz
$$\gamma(0) = Id(x_0) = x_0$$
$$\gamma(1) = g \circ f(x_0) = x_1$$

Logo,

$$\begin{array}{ccc}
\pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{f_*} & \pi_1(Y, y_0) \\
{\scriptstyle \hat{A}_{\bar{\gamma}} \circ g_* \circ f_*} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle g_*} \\
\pi_1(X, x_0) & \xleftarrow[\hat{A}_{\bar{\gamma}}]{\cong} & \pi_1(X, x_1)
\end{array}$$

pois $\hat{A}_\gamma$ é iso: se $\hat{A}_\gamma \circ g_* \circ f_* = \varphi$ $\Rightarrow g_* \circ f_* = \underbrace{\hat{A}_\gamma^{-1} \circ \varphi}_{\text{composta de iso}}$

Note que se $\hat{A}_{\bar{\gamma}} \circ g_* \circ f_*$ é um $\cong$ $\Rightarrow$ $g_* \circ f_*$ é um iso

$\Rightarrow f_*$ é injetor e g_* é sobrejetor (Exercício!)

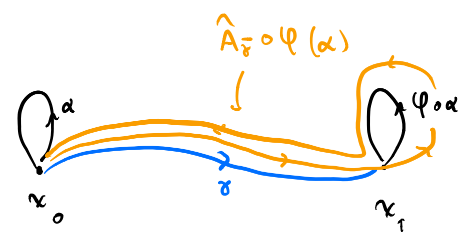
Fazendo um argumento análogo para $f_* \circ g_* : \pi_1(Y, y_0) \to \pi_1(Y, y_1)$ teremos que f_* e g_* são isomorfismos.

Logo, basta mostrar que:

Lema: Se $\varphi : X \to X$, $Id_X \simeq_H \varphi$, $\gamma = H(x_0, -)$

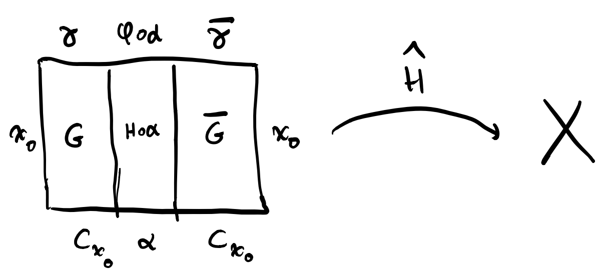
$\Rightarrow \hat{A}_\gamma \circ \varphi_* : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$ é um iso

Dem:



Seja $\alpha' : I \to X$, $\alpha'(s) = \bar\gamma * (\varphi \circ \alpha) * \gamma(s) = \left(\left(A_{\bar\gamma} \circ \varphi\right)(\alpha)\right)(s)$

Vamos mostrar que α e α' são livremente homotópicas



$$\underbrace{\hat{H} = \bar{G} * \left((H \circ \alpha) * G\right)}_{\text{Escreva a fórmula explícita!!!}}$$

onde $G(s,t) = \gamma(st)$

$\bar{G}(s,t) = \gamma(t(1-s))$

pela prop (*)

Logo, (*) $\exists\, [\beta] \in \pi_1(X, x_0)$ t.q. $\hat{A}_\gamma \varphi_* [\alpha] = [\beta][\alpha][\beta]^{-1} \Rightarrow \hat{A}_\gamma \varphi_*$ é $\cong$ ∎