Aula 7 : Grupo fundamental

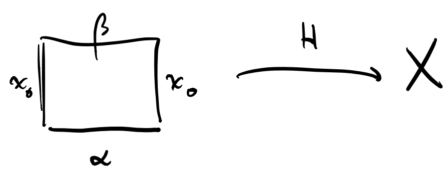
- X esp. topológico e $x \in X$
- $\Omega(X, x) = \{\alpha : I \to X \mid \alpha(0) = \alpha(1) = x\}$

<u>Def</u>: $\pi_1(X, x) = \Omega(X, x)/\sim$

onde $[\alpha] = [\beta] \iff \alpha \sim \beta \text{ rel } \partial I$

Ou seja: $[\alpha] = [\beta] \iff \exists\, H : I \times I \longrightarrow X$ tal que

$$H(s,0) = \alpha(s)$$
$$H(s,1) = \beta(s) \qquad \forall s,t \qquad \begin{pmatrix} s \equiv \text{parâmetro da curva} \\ t \equiv \text{parâmetro da homotopia} \end{pmatrix}$$
$$H(0,t) = H(1,t) = x_0$$



<u>OBJETIVO</u>: Mostrar que $\pi_1(X, x_0)$ é um grupo

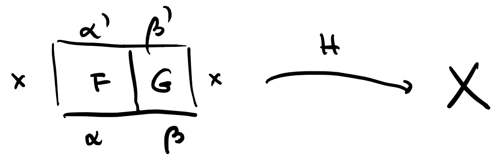
- <u>Produto</u>:

  - Em $\Omega(X, x_0)$ definimos

$$\beta * \alpha(s) = \begin{cases} \alpha(2s) & 0 \leq s \leq 1/2 \\ \beta(2s-1) & 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases}$$

<u>Lema</u>: $\begin{cases} \alpha \sim \alpha' \text{ rel } \partial I \\ \beta \sim \beta' \text{ rel } \partial I \end{cases} \Rightarrow \beta * \alpha \sim \beta' * \alpha' \text{ rel } \partial I$

Dem: Sejam $\alpha \underset{F}{\sim} \alpha'$ rel ∂I, $\beta \underset{G}{\sim} \beta'$ rel ∂I



Defina $\quad H(s,t) = \begin{cases} F(2s,t) & 0 \le s \le 1/2 \\ G(2s-1,t) & 1/2 \le s \le 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow \cdot\ H(s,0) = \begin{cases} F(2s,0) & 0 \le s \le 1/2 \\ G(2s-1,0) & 1/2 \le s \le 1 \end{cases} = \begin{cases} \alpha(2s) & 0 \le s \le 1/2 \\ \beta(2s-1) & 1/2 \le s \le 1 \end{cases} = \beta * \alpha(s)$$

$$\cdot\ H(s,1) = \begin{cases} F(2s,1) & 0 \le s \le 1/2 \\ G(2s,1) & 1/2 \le s \le 1 \end{cases} = \begin{cases} \alpha'(2s) & 0 \le s \le 1/2 \\ \beta'(2s-1) & 1/2 \le s \le 1 \end{cases} = \beta' * \alpha'(s)$$

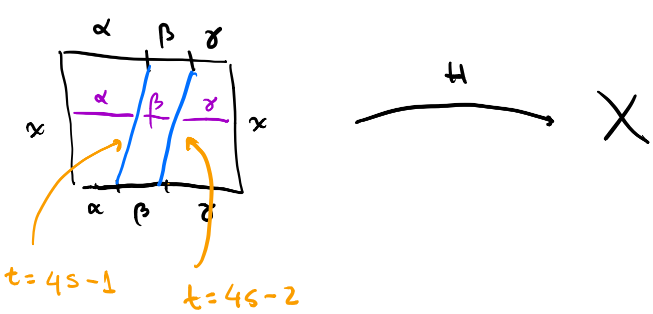
- $H(0,t) = F(0,t) = x \quad \forall t$
- $H(1,t) = G(1,t) = x \quad \forall t$

Ou seja $\quad \beta * \alpha \underset{H}{\sim} \beta' * \alpha'$ rel ∂I ∎

Consequência: $*$ induz $\quad [\beta]\cdot[\alpha] = [\beta * \alpha]$ produto em $\pi_1(X, x_0)$.

Lema: $\gamma * (\beta * \alpha) \sim (\gamma * \beta) * \alpha$ rel ∂I

Dem:



$$H(s,t) = \begin{cases} \alpha\left(\frac{4s}{t+1}\right) & 0 \le s \le (t+1)/4 \\ \beta(4s-t-1) & (t+1)/4 \le s \le (t+2)/4 \\ \gamma\left(\frac{4s-t-2}{2-t}\right) & (t+2)/4 \le s \le 1 \end{cases}$$

$H(s,0) = \gamma * (\beta * \alpha)(s)$

$H(s,1) = (\gamma * \beta) * \alpha\,(s)$

$H(0,t) = H(1,t) = x$ $\blacksquare$

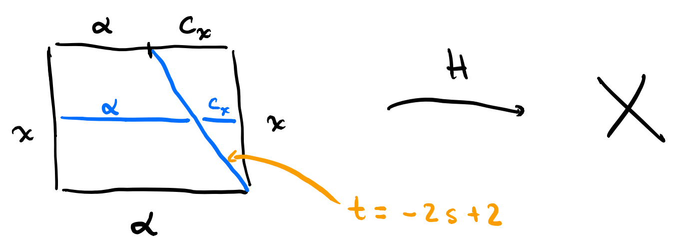
Consequência :

O produto $[\beta][\alpha] = [\beta * \alpha]$ é associativo.

Lema : Seja $c_x \in \Omega(X,x)$, $c_x(s) = x \ \forall s$.

$\Rightarrow \quad c_x * \alpha \sim \alpha * c_x \sim \alpha \quad \text{rel } \partial I$

Dem :



$$H(s,t) = \begin{cases} \alpha\left(\frac{2s}{2-t}\right) & 0 \le s \le \frac{2-t}{2} \\ x & \frac{2-t}{2} \le s \le 1 \end{cases}$$

$H(s,0) = \alpha(s)$

$H(s,1) = c_x * \alpha$

$H(0,t) = H(1,t) = x$ $\blacksquare$

(Exercício: Mostre que $\alpha * c_x \sim \alpha$)

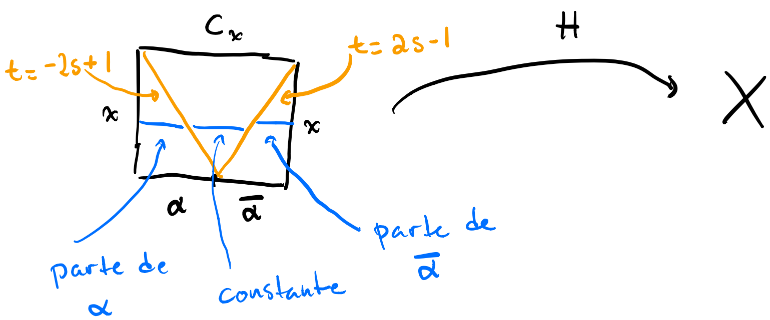
4

Consequência: Em $\pi_1(X,x)$, se $[c_x][\alpha] = [\alpha][c_x] = [\alpha]$

Lema: Seja $\alpha \in \Omega(X,x)$ e $\bar{\alpha} \in \Omega(X,x)$, $\bar{\alpha}(s) = \alpha(1-s)$.

Então $\alpha * \bar{\alpha} \sim \bar{\alpha} * \alpha \sim c_x$ rel ∂I

Dem:



$$H(s,t) = \begin{cases} \alpha(2s) & 0 \le s \le \frac{1-t}{2} \\ \alpha(1-t) & \frac{1-t}{2} \le s \le \frac{1+t}{2} \\ \alpha(2-2s) & \frac{1+t}{2} \le s \le 1 \end{cases}$$

$H(s,0) = \bar{\alpha} * \alpha\,(s)$

$H(s,1) = c_x$

$H(0,t) = H(1,t) = x$ ∎

Consequencia: Em $\pi_1(X,x)$ temos $[\alpha][\bar{\alpha}] = [\bar{\alpha}][\alpha] = [c_x]$

Teorema: $\pi_1(X,x)$ é um grupo onde $[\beta][\alpha] = [\beta * \alpha]$,

$e = [c_x]$, $[\alpha]^{-1} = [\bar{\alpha}]$

Dem: Segue os lemas acima ∎

Terminologia: $\pi_1(X,x)$ é o <u>grupo fundamental</u> de X com pto base x

- **Aplicação Induzida:**

Seja $f: X \to Y$, $f(x) = y$

$\Rightarrow f$ induz $f_*: \pi_1(X, x) \longrightarrow \pi_1(Y, y)$ (homomorfismo de grupos)

$$f_*[\alpha] = [f \circ \alpha]$$

De fato:

Lema: f_* está bem definida: $\alpha \sim \beta \text{ rel } \partial I \Rightarrow f\circ\alpha \sim f\circ\beta \text{ rel } \partial I$

Dem: Seja $\alpha \underset{H}{\sim} \beta \text{ rel } \partial I$. Defina

$$\hat{H}: I \times I \longrightarrow Y, \quad \hat{H}(s,t) = f(H(s,t))$$

$$\Rightarrow \hat{H}(s,0) = f(\alpha(s))$$
$$\hat{H}(s,1) = f(\beta(s))$$
$$\hat{H}(0,t) = \hat{H}(1,t) = f(x) = y$$

$\blacksquare$

Lema: $f_*: \pi_1(X,x) \longrightarrow \pi_1(Y,y)$ é um homomorfismos

Dem: $f_*([\beta][\alpha]) = f_*[\beta * \alpha] = [f \circ (\beta * \alpha)]$

mas

$$f \circ (\beta * \alpha) = \begin{cases} f(\alpha(2s)) & \text{se } 0 \le s \le 1/2 \\ f(\beta(2s-1)) & \text{se } 1/2 \le s \le 1 \end{cases}$$

ou seja $f \circ (\beta * \alpha) = (f\circ\beta) * (f \circ \alpha)$

$$\Rightarrow [f \circ (\beta * \alpha)] = [(f\circ\beta) * f\circ\alpha] = [f\circ\beta][f\circ\alpha] = f_*[\beta] \cdot f_*[\alpha]$$

$\blacksquare$

<u>Teorema</u> $\pi_1 : Top^* \longrightarrow Grp.$ é um funtor

<u>Dem</u>: Temos que mostrar que $\cdot\ (Id_X)_* = Id_{\pi_1(X,x)}$

$\cdot\ (f \circ g)_* = f_* \circ g_*$.

Ambas são imediatas da definição ∎

<u>Corolário</u>: Se $f : (X,x) \longrightarrow (Y,y)$ é um homeo

$\Rightarrow f_* : \pi_1(X,x) \longrightarrow \pi_1(Y,y)$ é um isomorfismo.

<u>Corolário</u>: Seja $A \subset X$ e $r : X \longrightarrow A$ uma retração.

$\Rightarrow r_* : \pi_1(X,a) \rightarrow \pi_1(A,a)$ é sobrejetora $\forall a \in A$

<u>Dem</u>: $r \circ i = Id_A \Rightarrow r_* \circ i_* = Id_{\pi_1(A,a)}$

Logo, se $[\alpha] \in \pi_1(A,a) \Rightarrow [\alpha] = r_*(\underbrace{i_*[\alpha]}_{\pi_1(X,a)})$ ///

$\cdot$ Vamos assumir que $\pi_1(S^1,p) \neq \{e\}$ (Vamos provar isso depois)

<u>Prop</u>: Não existe retração de $r : D^2 \longrightarrow S^1 = \partial D^2$

<u>Dem</u>: D^2 é contrátil $\Rightarrow \pi_1(D^2,p) = \{e\}$.

Como NÃO existe aplicação sobrejetor $\pi_1(D^2,p) \rightarrow \pi_1(S^1,p)$

$\Rightarrow$ Não existe retração $r : D^2 \longrightarrow S^1$ ∎

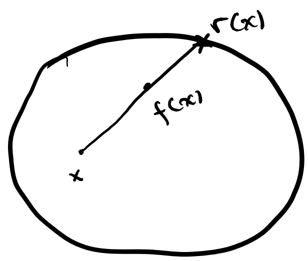
<u>Teorema</u> (Pto fixo de Brouwer)

Toda função $f : D^2 \longrightarrow D^2$ tem ao menos um ponto fixo ($x \in D^2$ t.q. $f(x) = x$)

Dem: Suponha que $f: D^2 \to D^2$ Não tenha pto fixo.
Vamos construir uma retração $r: D^2 \to S^1$

$$r(x) = p \quad \text{onde} \quad p = \underbrace{\overrightarrow{f(x)x} \cap S^1}$$

pega a semi-reta ligando $f(x)$ a x e toma $r(x)$ como o pto que essa semi-reta intersecta S^1



(Escreva uma fórmula p/ $r(x)$!)

$\blacksquare$

Próxima Aula: (1) Dependência no ponto Base x

(2) $f: X \to Y$ equivalência de homotopia

$\Rightarrow f_*: \pi_1(X, x) \to \pi_1(X, f(x))$ é $\cong$