Aula 6:

Lembre que: • Homotopia $f \sim_H g$

$H : X \times I \longrightarrow Y$, $\quad H(x,0) = f(x)$, $H(x,1) = g(x)$ $\quad \forall x \in X$

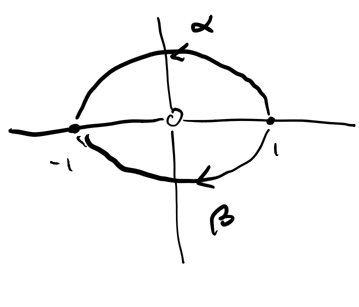
• $A \subset X$, Homotopia relativa a A $\quad f \sim_H g$ rel A

$$H : X \times I \longrightarrow Y, \quad \begin{cases} H(x,0) = f(x) \\ H(x,1) = g(x) \\ H(a,t) = f(a) = g(a) \quad \forall t, \ \forall a \in A \end{cases}$$

Exemplo: $X = I$, $Y = \mathbb{R}^2 - \{0\}$, $\quad A = \partial I = \{0,1\} \subset I$

$\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2 - \{0\}$, $\quad \alpha(s) = (\cos(\pi s), \operatorname{sen}(\pi s))$

$\beta : I \longrightarrow \mathbb{R}^2 - \{0\}$, $\quad \beta(s) = (\cos(\pi s), -\operatorname{sen}(\pi s))$



será provado depois

$\Rightarrow \alpha \sim_H \beta$ mas $\alpha \not\sim \beta$ rel ∂I

$$H(s,t) = \begin{cases} \alpha(s(1-2t)) & 0 \le t \le 1/2 \\ \beta(s(2t-1)) & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

(Não é relativa pois $H(1,t) \neq (-1,0) \quad \forall t$)

• Equivalência de Homotopia

Def: Seja $f : X \to Y$ contínua

1. f é uma equivalência de homotopia se existe $g : Y \to X$ tal que $\begin{cases} f \circ g \sim Id_Y \\ g \circ f \sim Id_X \end{cases}$

2. $X \sim Y$ X e Y são homotopicamente equivalentes (ou tem o mesmo tipo de homotopia) se existe uma equivalência de homotopia $f : X \to Y$.

3. X é contrátil se $X \sim \{*\}$ (conjunto com só um ponto)

Exemplos:

1. $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \sim S^n$

$r : \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \longrightarrow S^n$, $\quad r(x) = \frac{x}{\|x\|}$

$i : S^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$

$r \circ i = Id_{S^n}$, $\quad i \circ r \sim Id_{\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}}$

$H : (\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}) \times I \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$

$H(x,t) = (1-t)\frac{x}{\|x\|} + t\,x$ $\qquad H(x,0) = \frac{x}{\|x\|} = i \circ r\,(x)$

$H(x,1) = x = Id\,(x)$

2) $C(X) = (X \times I)/_{X \times \{1\}}$ é contrátil

$f : C(X) \longrightarrow \{[x,1]\}$

$g : \{[x,1]\} \longrightarrow C(X)$

$[x,1] \longmapsto [x,1]$

$f \circ g = Id_{\{[x,1]\}}$, $g \circ f \underset{H}{\sim} Id_{C(X)}$

$H([x,s],t) = [x,(1-t)s]$

3) V e.v. , V é contrátil

$f : V \longrightarrow \{0\}$

$g : \{0\} \hookrightarrow V$

$f \circ g = Id_{\{0\}}$

$g \circ f \underset{H}{\sim} Id_V$

$H(v,t) = tv$

$H(v,0) = 0 = (g \circ f)(v)$

$H(v,1) = v = Id(v)$

Exercício: Mostre que $\sim$ é relação de equiv. em TOP.

Exercício: Mostre que X é contrátil $\iff$ $Id_X \sim c_{x_0}$ onde c_{x_0} é a aplicação $c_{x_0} : X \to X$, $x \mapsto x_0$ constante

• Retrato por Deformação

Ideia: Um retrato por deformação é uma equivalência de Homotopia "geométrica"

Def: Seja $A \subset X$. Uma <u>retração de A em X</u> é uma função contínua $r: X \to A$ tal que

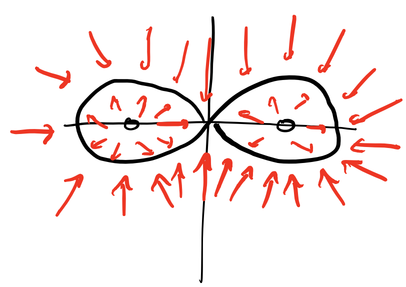
$$r(a) = a \quad \forall a \in A \qquad (r \circ i = Id_A)$$

- Uma retração é um <u>retrato por deformação</u> se $\quad i \circ r \sim Id_X$

<u>Geométrico</u>: A Homotopia $Id_X \overset{H}{\Longrightarrow} i \circ r$ descreve para cada $x \in X$ uma curva ligando x a $H(x,1) = a \in A$

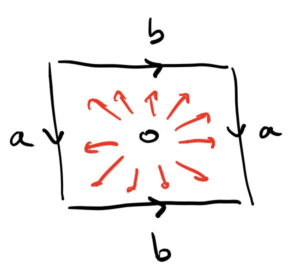
<u>Exemplos</u>: 1) $r_{S^n}: \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \longrightarrow S^n$ é um retrato por deformação

2) $\mathbb{R}^2 - \{p, q\} \sim S^1 \vee S^1$



Escreva Explicitamente!

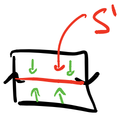
3) $T^2 - \{p\} \sim S^1 \vee S^1$



Escreva Explicitamente!

4 Se $X = A \cup e$, $A \cap e = \emptyset$ e $p \in e$

$\Rightarrow X - \{p\} \sim A$ (Exercício! Escreva com detalhes!)

5 $M =$  $\sim S^1$

$M = I \times I /_{(0,t) \sim (1,1-t)}$, $\quad S^1 \hookrightarrow M$

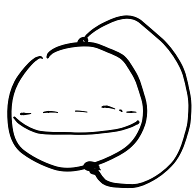
$e^{2\pi i s} \longmapsto [s, \frac{1}{2}]$

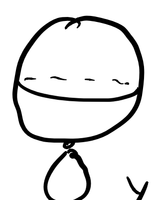
$r : M \to S^1$
$[(s,t)] \longmapsto [(s, \frac{1}{2})]$ $\qquad H([s,t], \varepsilon) = [s, (1-\varepsilon)t + \frac{\varepsilon}{2}]$

<u>Exercício</u>: Mostre as seguintes equivalências de Homotopia:

1) $\mathbb{R}^3 - \{\text{eixo } x\} \sim S^2 - \{p,q\} \sim S^1 \times I \sim S^1$

2) $\mathbb{R}^3 - \{\text{eixo } x \text{ e eixo } y\} \sim S^2 - \{p_1, p_2, p_3, p_4\} \sim S^1 \vee S^1 \vee S^1$

3) 
X

$\sim$ 
Y

$X = S^2 \sqcup I /_{\substack{N \sim 0 \\ S \sim 1}}$

$Y = S^2 \vee S^1$

<u>OBS</u>: X contrátil $\not\Rightarrow$ $\exists$ retrato por deformação $r : X \to \{x_0\}$
$x_0 \in X$

Ver Exercício 6, p. 18 de Hatcher (Mas se X é razoável isso é verdade)

Prop: Se X é contrátil, Y conexo por caminhos, $f, g : X \to Y$

$\Rightarrow \quad f \sim g$

Dem: Suponha X contrátil, seja

$\varphi : X \longrightarrow \{p\}$ uma equivalência de homotopia

com inversa homotópica $\psi : \{p\} \longrightarrow X$, $\psi(p) = x_0$

Seja $H : X \times I \longrightarrow X$ $\quad \begin{array}{l} H(x,0) = x \\ H(x,1) = x_0 \end{array} \quad \forall x$

Defina $F : X \times I \longrightarrow Y$, $G : X \times I \longrightarrow Y$

$$F(x,t) = f(H(x,t))$$
$$G(x,t) = g(H(x,t))$$

$$\Rightarrow \quad f \underset{F}{\sim} c_{f(x_0)}$$
$$g \underset{G}{\sim} c_{g(x_0)}$$

Agora, seja $\alpha : I \to Y$, $\alpha(0) = f(x_0)$, $\alpha(1) = g(x_0)$

(vamos interpretar α como uma homotopia entre $c_{f(x_0)} \underset{\alpha}{\sim} c_{g(x_0)}$

Defina $f \underset{\hat{H}}{\sim} g$

$$\hat{H} : X \times I \longrightarrow Y \, , \quad \underset{\overline{G} * (\alpha * F)}{\hat{H}(x,t) \,\,\shortparallel} = \begin{cases} F(x, 4t) & 0 \leq t \leq 1/4 \\ \alpha(4t-1) & 1/4 \leq t \leq 1/2 \\ G(x, 2(1-t)) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$\blacksquare$

<u>Exercício</u>: Mostre que se Y é contrátil, $f, g : X \to Y \Rightarrow f \sim g$.