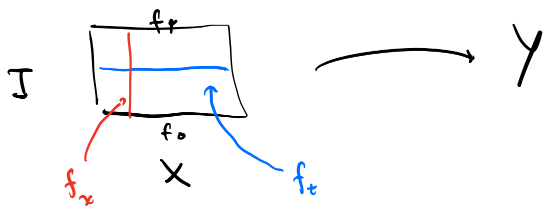
Aula 5: Homotopia

- Sejam $f_0, f_1 : X \longrightarrow Y$ contínuas

Def: Uma homotopia entre f_0 e f_1 é uma função contínua

$$H : X \times I \longrightarrow Y \quad \text{tal que} \quad \begin{matrix} H(x,0) = f_0(x) \\ H(x,1) = f_1(x) \end{matrix} \quad \forall x \in X$$



OBS: Para cada $t \in I$, $f_t = H(-,t) : X \longrightarrow Y$ é contínua pois é a composta de

$$\begin{matrix} X & \longrightarrow & X \times I & \xrightarrow{H} & Y \\ x & \longmapsto & (x,t) & & \end{matrix}$$

Além disso, $\forall x \in X$, $f_x = H(x,-) : I \longrightarrow Y$ é uma curva contínua ligando $f_0(x)$ a $f_1(x)$ em Y.

OBS: Intuitivamente, pensamos em $H : I \longrightarrow C(X,Y)$ é uma curva "contínua" ligando f_0 a f_1. Isso pode ser tornado preciso:

- $C(X,Y)$ é um espaço topológico com a topologia compacto-Aberta:

  Sub-base: $\mathcal{N}(K,U) = \{ f : X \to Y \mid f(K) \subset U,\ K \subset X \text{ cpt},\ U \subset Y \text{ aberto} \}$

- Se X é localmente compacto e Hausdorff & Y é Hausdorff então $\{ H : X \times I \to Y \text{ contínua} \} \longleftrightarrow \{ H : I \to C(X,Y) \text{ contínua} \}$ (ver Bredon VII.2)

Notação/Terminologia

- $f_0 \sim f_1$ (f_0 e f_1 são homotópicos) se $\exists\, H: X \times I \to Y$ homotopia entre f_0 e f_1
- $f_0 \overset{H}{\Rightarrow} f_1$ ou $f_0 \sim_H f_1$ se H é uma homotopia entre f_0 e f_1

Prop: $\sim$ é uma relação de equivalência em $C(X,Y)$

Dem:
- $f \sim f$: $H(x,t) = f(x) \quad \forall t$
- $f \underset{H}{\sim} g \Rightarrow g \underset{\bar{H}}{\sim} f$: $\bar{H}(x,t) = H(x, 1-t)$
- $f \underset{H}{\sim} g,\ g \underset{G}{\sim} h \Rightarrow f \underset{G*H}{\sim} h$: $G*H(x,t) = \begin{cases} H(x,2t) & 0 \le t \le 1/2 \\ G(x, 2t-1) & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$

Exercício: Mostre que $G*H: X \times I \to Y$ é contínua. ∎

Notação:
- $[X,Y] = C(X,Y)/\sim\ = \{\text{comp. conexas de } C(X,Y)\}$ se X é razoável
- $[f]$ = classe de homotopia de f

Exemplos: ① Seja V um espaço vetorial e $f, g: X \to V$

$\Rightarrow f \sim g$ via uma homotopia linear (Basta V convexo)

$$H(x,t) = (1-t) f(x) + t\, g(x)$$

② $\|\cdot\|$ norma em V, $S(V) = \{v \in V \mid \|v\| = 1\}$

Se $f, g: X \to S(V)$, $f(x) \neq g(-x) \quad \forall x \in X$

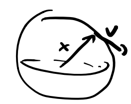
$\Rightarrow f \sim g$: $$H(x,t) = \frac{(1-t) f(x) + t\, g(x)}{\|(1-t) f(x) + t\, g(x)\|}$$

<u>Caso Particular</u>:

Se $f: S(V) \longrightarrow S(V)$ não tem ponto fixo, i.e., se $f(x) \neq x \ \forall x \Rightarrow f \sim A$ (aplicação antípoda $A(x) = -x$)

3 O espaço tangente de $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ em $x \in S^n$ é

$$T_x S^n = \{ v \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle x, v \rangle = 0 \}$$



- Um campo de vetores em S^n, $v \in \mathfrak{X}(S^n)$ é

$$v: S^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \quad \text{tal que} \quad \langle v(x), x \rangle = 0 \ \forall x$$

$(v(x) \in T_x S^n)$

- Suponha que $v \in \mathfrak{X}(S^n)$ é tal que $v(x) \neq 0 \ \forall x$ e seja

$$w: S^n \longrightarrow S^n, \quad x \longmapsto \frac{v(x)}{\|v(x)\|}.$$

Podemos usar w para construir uma homotopia entre $Id_{S^n} \sim A$:

$$H(x,t) = \cos(\pi t) \cdot x + \operatorname{sen}(\pi t) \cdot w(x)$$

Note que $H(x,t) \in S^n \ \forall x, \forall t$ pois

- $$\langle H(x,t), H(x,t) \rangle = \cos^2(\pi t) \|x\|^2 + 2\cos(\pi t)\operatorname{sen}(\pi t)\langle x, w(x) \rangle + \operatorname{sen}^2(\pi t)\|w(x)\|^2$$
$$= \cos^2(\pi t) + \operatorname{sen}^2(\pi t) = 1$$

- $H(x,0) = x$, $H(x,1) = -x = A(x)$

<u>Conclusão</u>: Se $Id_{S^n} \not\simeq A \Rightarrow \nexists\, V \in \mathfrak{X}(S^n)$ tal que $V(x) \neq 0 \ \forall x$.

<u>OBS</u>: • Se n é ímpar, $n = 2k-1$

$$\Rightarrow V(x_1, \dots, x_{2k}) = (x_2, -x_1, x_4, -x_3, \dots, x_{2k}, -x_{2k-1}) \in \mathfrak{X}(S^{2k-1})$$

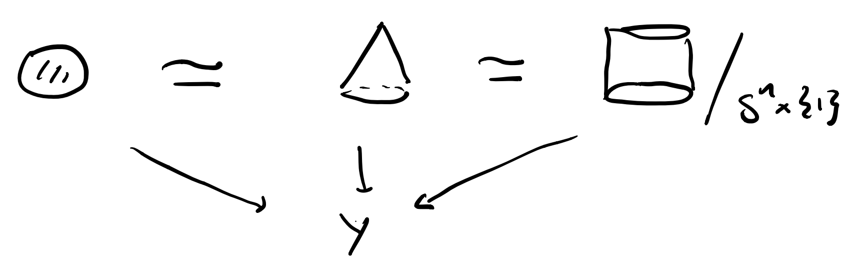
$$V(x) \neq 0 \quad \forall x \in S^{2k-1}$$

• Vamos mostrar depois que $Id_{S^{2k}} \not\simeq A \Rightarrow$

$\Rightarrow S^{2k}$ não admite campo não nulo em todos os pontos (teorema da bola cabeluda)

<u>Prop</u>: Seja $f: S^n \subset D^{n+1} \longrightarrow Y$ uma função contínua. Então f admite extensão $\tilde{f}: D^{n+1} \longrightarrow Y$ $(\tilde{f}|_{S^n} = f)$ $\iff f \sim$ cte.

<u>Dem</u>: Ideia



$(\Rightarrow)$ Seja $\tilde{f}: D^{n+1} \longrightarrow Y$ extensão de f. Defina

$$H: S^n \times I \longrightarrow Y$$

$$H(x,t) = \tilde{f}((1-t)x) \quad \Rightarrow \quad H(x,0) = \tilde{f}(x) = f(x)$$
$$H(x,1) = \tilde{f}(0) \ \forall x.$$

($\Leftarrow$) Seja $H: S^n \times I \longrightarrow Y$, $\begin{matrix} H(x,0) = f(x) \\ H(x,1) = y_0 \end{matrix}$ $\forall t$

$$\Rightarrow \tilde{f}: D^{n+1} \longrightarrow Y, \quad \tilde{f}(p) = \begin{cases} H\left(\frac{p}{\|p\|}, 1 - \|p\|\right) & \text{se } p \neq 0 \\ y_0 & \text{se } p = 0 \end{cases} \quad \blacksquare$$

- Homotopia Relativa

  - $A \subset X$

Def: $f, g: X \longrightarrow Y$ são homotopicos relativo a A ($f \sim g$ rel A) se existe homotopia

$$H: X \times I \longrightarrow Y \quad \text{t.q.} \begin{cases} H(x,0) = f(x) \\ H(x,1) = g(x) \\ H(a,t) = f(a) \quad \forall t \end{cases}$$

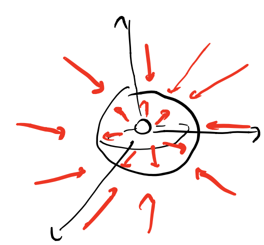
(Em particular, $f|_A = g|_A$)

Exemplo $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}} \sim r_{S^n}$ rel S^n

onde $r_{S^n}: \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$

$$x \longmapsto \frac{x}{\|x\|}$$

$$H(x,t) = (1-t)\,x + t\,\frac{x}{\|x\|}$$



• Equivalência de Homotopia

Def: • $f: X \to Y$ é uma equivalência de homotopia se existe $g: Y \to X$ t.q. $\begin{cases} f \circ g \sim Id_Y \\ g \circ f \sim Id_X \end{cases}$

• Nesse caso, $X \sim Y$ (X e Y são homotopicamente equivalentes ou tem o mesmo tipo de homotopia)

• X é contrátil se $X \sim \{*\}$ (Espaço com um ponto)

Exemplo: $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \sim S^n$

$$r_{S^n}: \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \longrightarrow S^n$$

$$i: S^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$$

Exemplo: $C(X) = (X \times I)/_{X \times \{1\}}$ é contrátil

$$\begin{aligned} f&: C(X) \longrightarrow \{[x,1]\} \\ g&: \{[x,1]\} \longrightarrow C(X) \\ &\quad [x,1] \longmapsto [x,1] \end{aligned} \qquad \Bigg| \qquad \begin{aligned} &f \circ g = Id_{\{[x,1]\}}, \quad g \circ f \underset{H}{\sim} Id_{C(X)} \\ &H([x,s],t) = [x,(1-t)s] \end{aligned}$$

Exercício: Mostre que $\sim$ é relação de equiv. em TOP.

Exercício: Mostre que X é contrátil $\iff Id_X \sim c_{x_0}$ onde c_{x_0} é a aplicação $c_{x_0}: X \to X$, $x \mapsto x_0$ constante

• Retrato por Deformação

Ideia: Um retrato por deformação é uma equivalência de Homotopia "geométrica"

Def: Seja $A \subset X$. Uma retração de A em X é uma função contínua $r: X \to A$ tal que

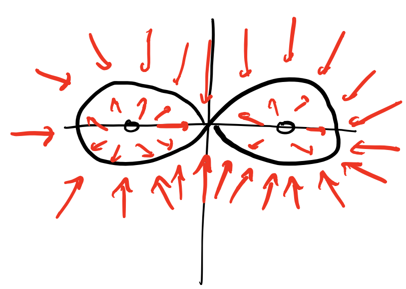
$$r(a) = a \quad \forall a \in A \qquad (r \circ i = Id_A)$$

• Uma retração é um retrato por deformação se $i \circ r \sim Id_X$

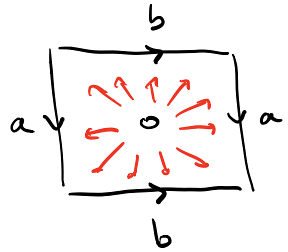
Geométrico: A Homotopia $Id_X \xRightarrow{H} i \circ r$ descreve para cada $x \in X$ uma curva ligando x a $H(x,1) = a \in A$

Exemplos: ① $r_{S^n}: \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \longrightarrow S^n$ é um retrato por deformação

② $\mathbb{R}^2 - \{p, q\} \sim S^1 \vee S^1$

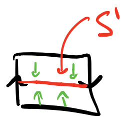


3. $T^2 - \{p\} \sim S^1 \vee S^1$



4. Se $X = A \cup e$, $A \cap e = \phi$ e $p \in e$

$\Rightarrow X - \{p\} \sim A$ (Exercício! Escreva com detalhes!)

5. $M =$  $\sim S^1$

$M = I \times I / (0,t) \sim (1, 1-t)$, $S^1 \hookrightarrow M$

$e^{2\pi i s} \longmapsto [s, \frac{1}{2}]$

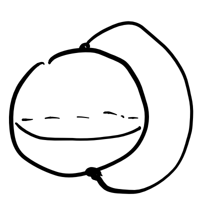
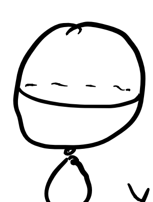
$r : M \to S^1$
$[(s,t)] \longmapsto [(s, \frac{1}{2})]$

$H([s,t], \varepsilon) = [s, (1-\varepsilon)t + \frac{\varepsilon}{2}]$

<u>Exercício</u>: Mostre as seguintes equivalências de Homotopia:

1) $\mathbb{R}^3 - \{\text{eixo } x\} \sim S^2 - \{p, q\} \sim S^1 \times I \sim S^1$

2) $\mathbb{R}^3 - \{\text{eixo } x \text{ e eixo } y\} \sim S^2 - \{p_1, p_2, p_3, p_4\} \sim S^1 \vee S^1 \vee S^1$

3)  $\sim$ 

X Y

$X = S^2 \sqcup I / {N \sim 0 \atop S \sim 1}$

$Y = S^2 \vee S^1$