Aula 4: Complexos CW (parte II)

Lembre que:

- X Hausdorff
- n-célula em X $\quad h_e : D^n \to X$ tal que
  $h_e : \mathring{D}^n \to e \subset X$ é homeo (e é célula aberta)
- $A \subset X$ fechado; X é obtido de A colando uma n-célula se existe n-célula aberta $e \subset X$ tal que

$$X = A \cup e \,, \qquad A \cap e = \phi$$

Prop: $X = D^n$ ou $X = I^n$, $\sim$ relação em X t.q.
$x \sim x' \Rightarrow x = x'$ ou $x, x' \in \partial X$, $\quad Y = X/\sim$ Hausdorff
$\Rightarrow Y$ é obtido de $B = \pi(\partial X)$ colando n-célula

Exemplo $\mathbb{R}P^n$ é obtido de $\mathbb{R}P^{n-1}$ colando uma n-célula:

De fato, $\mathbb{R}P^n \cong D^n/\sim$ onde $p \sim q \Leftrightarrow p = q$ ou $p, q \in \partial D^n = S^{n-1}$, $p = -q$

Pela prop. $\quad \mathbb{R}P^n = \underbrace{\pi(\partial D^n)}_{S^{n-1}/p\sim -p \,=\, \mathbb{R}P^{n-1}} \cup e^n$

- Aplicação Caracterísitica e Propriedade Universal

Suponha que X é obtido de A colando uma n-célula e seja $\chi_e = h_e|_{\partial D^n} : S^{n-1} \to A \subset X$ (aplicação característica)

Temos o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd} S^{n-1} \arrow[r, hook] \arrow[d, "\chi_e"'] & D^n \arrow[d, "h_e"] \\ A \arrow[r, hook] & X \end{tikzcd} \quad ⊛$$

- Podemos reconstruir X a partir de A e χ_e:

Teorema: Se A é Hausdorff e $\chi : S^{n-1} \to A$ é contínua então existe um único espaço Hausdorff X (a menos de Homeo) obtido de A colando uma n-célula com aplicação característica χ

Dem: Segue da propriedade universal (poshout) do diagrama ⊛ com $X = A \cup_\chi D^n = A \sqcup D^n/\sim$ onde

$$p \in S^{n-1} = \partial D^n \sim \chi(p) \in A$$

Prop: (Propriedade Universal)
Se X é obtido A colando uma n-célula (e, h_e) então ⊛ é um poshout na categoria dos espaços topológicos Hausdorff.

Poshout: Se Y é um espaço Hausdorff e

$$\begin{tikzcd} S^{n-1} \arrow[r, hook] \arrow[d, "\chi_e"'] & D^n \arrow[d, "h_e"] \arrow[dr, bend left, "f_e"] & \\ A \arrow[r, hook, "i"] \arrow[rr, bend right, "f_A"'] & X \arrow[r, dashed, "\exists! f"] & Y \end{tikzcd}$$

$f_A : A \to Y$, $f_e : D^n \to Y$ são tais que $f_A \circ \chi_e(p) = f_e(p)$ $\forall p \in S^{n-1} \Rightarrow \exists!\ f : X \to Y$ tal que

$$\begin{cases} f(a) = f_A(a) & \forall a \in A \\ f_e(p) = f(h_e(p)) & \forall p \in D^n \end{cases}$$

Dem:

- f existe e é única pois $X = A \cup e$ e

$$\begin{cases} f(a) = f_A(a) & \forall a \in A \\ f(x) = f_e\left(h_e\big|_{\mathring{D}^n}^{-1}(x)\right) & \forall x \in e \end{cases}$$

Bem definido pois $A \cap e = \phi$

Temos que mostra que f é contínua:

Seja $F \subset Y$ fechado.

$\Rightarrow f^{-1}(F) = i\left(f_A^{-1}(F)\right) \cup h_e\left(f_e^{-1}(F)\right)$

- $f_A^{-1}(F)$ é fechado em A, A fechado em X

$\Rightarrow i\left(f_A^{-1}(F)\right)$ fechado em X

- $f_e^{-1}(F)$ é fechado em $D^n \Rightarrow f_e^{-1}(F)$ é compacto

$\Rightarrow h_e\left(f_e^{-1}(F)\right)$ é compacto $\Rightarrow h_e\left(f_e^{-1}(F)\right)$ é fechado em X (pois X é Hausdorff)

$\Rightarrow f^{-1}(F)$ é fechado $\Rightarrow f$ é contínua. ∎

Exercício: Demonstre o teorema:

- Mostre que $X = A \cup_\chi D^n$ é Hausdorff
- Mostre que X satisfaz a propriedade universal
- Conclua o teorema

<u>OBS</u>: Unicidade do teorema: Se X e X' são espaços Hausdorff satisfazendo o teorema então

$$
\begin{tikzcd}
S^{n-1} \arrow[r, hook] \arrow[d, "\chi_e"'] & D^n \arrow[d, "h_e"] \arrow[ddr, bend left, "h_e'"] \arrow[dddrr, bend left] & & \\
A \arrow[r] \arrow[drr, bend right] \arrow[ddrrr, bend right] & X \arrow[dr, dashed] & & \\
& & X' \arrow[dr, dashed] & \\
& & & X
\end{tikzcd}
$$

(Explicar em sala)

<u>Exemplo</u>: $\mathbb{R}P^n = \mathbb{R}P^{n-1} \cup_\chi D^n$ onde

$$\chi : S^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}P^{n-1} = S^{n-1}/_{p \sim -p} \quad , \quad \chi(p) = [p]$$

<u>Exercício</u>: Mostre que $\mathbb{C}P^n$ é obtido de $\mathbb{C}P^{n-1}$ colando um $2n$-célula com aplicação característica

$$\chi : S^{2n-1} \longrightarrow \mathbb{C}P^{n-1} = S^{2n-1}/S^1$$
$$p \longmapsto [p]$$

III) <u>Colando muitas n-células</u>

- X espaço Hausdorff
- $A \subset X$ fechado

Def: X é <u>obtido de A colando n-células</u> se existem n-células $e_\lambda \subset X$, $\lambda \in \Lambda$ tais que

(1) $X = A \cup \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} e_\lambda \right)$

(2) $A \cap e_\lambda = \phi \ \ \forall \lambda \in \Lambda$, $\underbrace{\partial_{cell}(e_\lambda)}_{\bar{e}_\lambda - e_\lambda} \subset A$, $e_\lambda \cap e_\gamma = \phi \ \ \forall \lambda, \gamma \in \Lambda$

(3) (Weak Topology) $F \subset X$ é fechado $\iff \begin{cases} F \cap A \text{ é fechado} \\ F \cap e_\lambda \text{ é fech. } \forall \lambda \end{cases}$

OBS: (3) é automático se Λ é finito

OBS: No caso Λ infinito, (3) é exatamente o que precisamos para demostrar a prop. universal (continuidade de f) na seguinte prop.

Prop: (Propriedade Universal) Se X é obtido de $A \subset X$ colando n-células $\{e_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ com aplicações características $\{\chi_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ então o seguinte diagrama é um pushout

$$\begin{tikzcd} \coprod_{\lambda \in \Lambda} S^{n-1}_\lambda \arrow[r, hook] \arrow[d, "\amalg \chi_\lambda"'] & \coprod D^n_\lambda \arrow[d, "\amalg h_{e_\lambda}"] \\ A \arrow[r] & X \arrow[ul, phantom, "\ulcorner", very near start] \end{tikzcd}$$

Em particular,

$$X \cong A \cup_{\amalg \chi_\lambda} \left(\coprod_{\lambda \in \Lambda} D^n_\lambda \right)$$

Dem: Identica ao caso de uma célula usando (3) p/ mostrar que f é contínua. (Exercício)

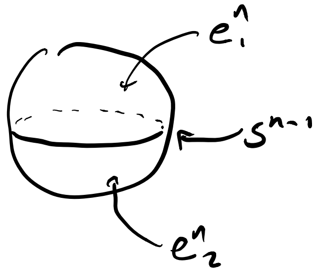
Exercício: Mostre que

(1) $e_\lambda \subset X$ é aberto $\forall \lambda \in \Lambda$

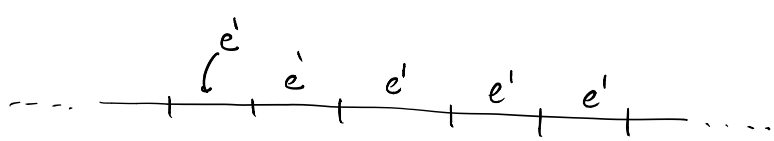
(2) $e_\lambda \cap \overline{e}_\gamma = \phi \quad \forall \lambda, \gamma \in \Lambda, \ \lambda \neq \gamma$

Exemplos:

1) S^n é obtido de S^{n-1} colando duas n-células



2) $\mathbb{R}$ é obtido $\mathbb{Z}$ colando infinitas 1-células



IV) Complexos CW

Seja X um espaço top. Hausdorff

Def: Uma decomposição celular de X é uma sequencia de subespaços fechados

$$\phi = X_{-1} \subset X_0 \subset X_2 \subset \ldots \subset X$$

tal que

(1) $\bigcup_n X_n = X$

(2) X_n é obtido de X_{n-1} colando n-células

(3) $F \subset X_n$ é fechado $\Longleftrightarrow$ $F \cap X_n$ é fechado $\forall n$

OBS: • Em (2), as aplicações definidoras (ou características) são parte da definição

• (3) só é importante se $X_{n+1} \neq X_n$ $\forall n$.
Se $X_n = X$ $\forall n \geq N$, então (3) é trivialmente satisfeito.

• O mesmo espaço X admite muitas decomposições celulares

Def: Um complexo CW é um espaço topológico (Hausdorff) X junto com uma decomposição celular

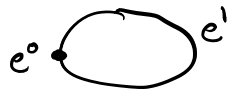
OBS/Exercício: (Sobre Hausdorff)

Mostre que se começamos com um conjunto discreto X_0 e construímos um espaço X de maneira indutiva colando n-células de forma que $X_0 \subset X_1 \subset \cdots \subset X$ é uma decomposição celular de X e X é um complexo CW
$\Rightarrow$ X é Hausdorff.

Nomeclatura: X_n é o n-esqueleto de X

Exemplos:

1) $S^1 = e^0 \cup e^1$ $\{p\} \subset S^1$ (Decomp. Celular)

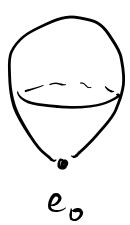


2) $S^n = e^0 \cup e^n$

$X_0 = e^0$

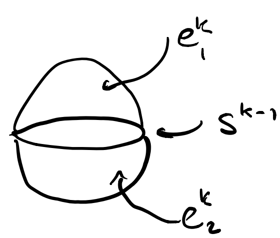
$X_1 = X_2 = \cdots = X_{n-1} = e^0$

$X_n = S^n = X_{n+1} = \cdots$

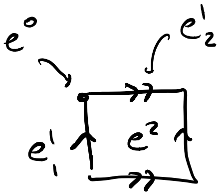


3) $S^n = (e^0_1 \cup e^0_2) \cup (e^1_1 \cup e^1_2) \cup \cdots \cup (e^n_1 \cup e^n_2)$

Decomposição: $S^0 \subset S^1 \subset S^2 \subset \cdots \subset S^n$



4) $T^2 = e^0 \cup (e^1_1 \cup e^1_2) \cup e^2$

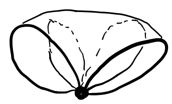


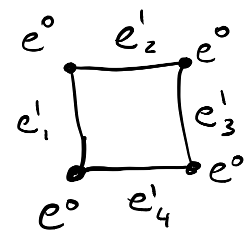
Decomposição: $\{p\} \subset S^1 \vee S^1 \subset T^2$

5) $\mathbb{R}P^n = e^0 \cup e^1 \cup e^2 \cup \cdots$ $\mathbb{R}P^0 \subset \mathbb{R}P^1 \subset \cdots \subset \mathbb{R}P^n$

6) $X =$ paraquedas $= I \times I / \sim$

$(0,0) \sim (1,0) \sim (0,1) \sim (1,1)$





Dec: $\{p\} \subset S^1 \vee S^1 \vee S^1 \vee S^1 \subset X$

Exercício: Mostre que

1) $K \subset X$ é compacto $\Rightarrow$ K intersecta um número finito de células de X

2) X é compacto $\Leftrightarrow$ X tem um número finito de células

Def Seja X um complexo-CW finito (compacto)
O número de Euler de X é

$$\chi(X) = \sum_k (-1)^k \varepsilon_k \quad \text{onde } \varepsilon_k = \# \, k\text{-células de } X$$

OBS: $\chi(X)$ é um invariante top. de X
(A demonstração usa homologia)