Aula 3: Complexo CW (Parte I)

Ideia: Construir espaços de forma indutiva:

- Começar com um conjunto discreto de pontos X_0
- Em X_0 cola discos de dimensão 1 (Intervalos) através de funções $\chi_\alpha : \partial D^1 = S^0 \longrightarrow X_0$ para obter X_1
- Em X_1 cola discos de dim 2 atrávés de

$$\chi_\alpha : \partial D^2 = S^1 \longrightarrow X_1$$

$$\vdots$$

Plano: Ao invés de definir diretamente, vou tentar chegar naturalmente na definição.

I) Reconhecendo Células em X

II) Colando uma n-célula em A para obter

$$X = A \cup_\chi e^n$$

III) Colando muitas n-células em A

IV) Definição de Complexo CW

I) Reconhecendo Células:

- X é um espaço topológico Hausdorff

Def: Uma n-célula em X é uma uma aplicação contínua

$h : D^n \longrightarrow X$ tal que $h|_{\mathring{D}^n} : \mathring{D}^n \longrightarrow h(\mathring{D}^n)$ é um homeo

Nomeclatura:

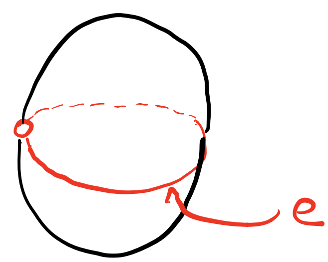
- $e = h(\mathring{D}^n) \subset X$ é uma n-célula aberta de X (NÃO é aberto em X)
- $h = h_e$ (para identificar a n-célula aberta)

Exemplo:

$X = S^2$, $h : D^1 = [-1,1] \longrightarrow S^2$,

$h(t) = (\cos \pi t, \operatorname{sen} \pi t, 0)$

e = Equador (sem um ponto)



- h_e é a <u>aplicação definidora</u> da célula aberta $e \subset X$
- $\partial_{cell}(e) = \bar{e} - e$ (fronteira celular de e)
- $\chi_e = h_e\big|_{\partial D^n} : S^{n-1} \longrightarrow X$ aplicação característica de e

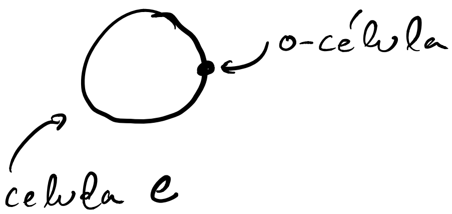
<u>OBS</u>: $e \subset X$, $e \cong D^n \not\Longrightarrow$ e é uma célula aberta

<u>exemplo</u>: $(0,+\infty) \subset \mathbb{R}$ Não é 1-célula aberta pois NÃO tem fecho compacto.

Exemplos simples:

- $n=0$, 0-células de X = pontos de X

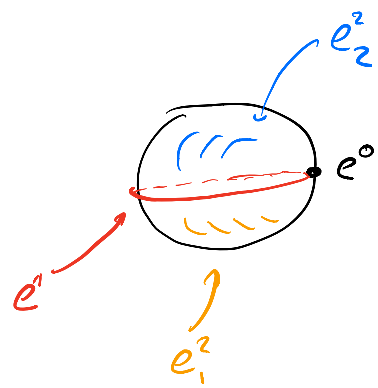
- Em S^1



$$\begin{tikzcd} {[0,1]} \arrow[d, "\cong"'] \arrow[dr, "f"] & \\ {[-1,1]} \arrow[r, "h_e"'] & S^1 \end{tikzcd}$$

$f(t) = (\cos 2\pi t, \text{sen}\, 2\pi t)$

- Em S^2



Função Explícita:

$S^2 = D^2/\partial D^2$, $h: D^2 \to S^2$ aplicação quociente.

Propriedade Topológicas (Exercício)

1) $h_e(D^n) = \bar{e}$
2) $h_e(S^{n-1}) = \partial_{cell}(e)$
3) $h_e: D^n \to \bar{e}$ é uma aplicação quociente, i.e.,

$U \subset \bar{e}$ é aberto na topologia induzida de X

$\iff h_e^{-1}(U)$ é aberto em D^n.

II) Colando um n-célula:

- X Hausdorff, $A \subset X$ subespaço fechado

Def: X é obtido de A colando uma n-célula se existir uma n-célula $(e, h_e) \subset X$ tal que

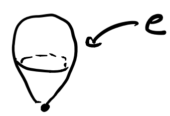
$$X = A \cup e, \quad A \cap e = \phi$$

Exemplos:

1. D^n é obtido de S^{n-1} colando um n-célula:

$$e = \mathring{D}^n, \quad h_e = Id_{D_n}$$

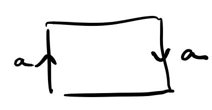
2. S^n é obtido de $\{p\}$ colando um n-célula



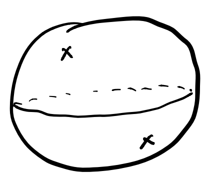
$h_e : D^n \to S^n \cong D^n/\partial D^n$
aplicação quociente

3. $\mathbb{R}P^2$ é obtido de M = faixa de Möbius colando uma 2-célula

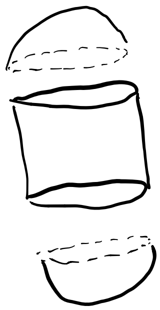
OBS: $M = (I \times I)/\sim \quad (0,t) \sim (1, 1-t)$

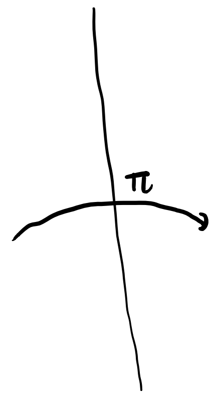
$M =$ 

$\mathbb{R}P^2 = S^2/_{x \sim -x}$

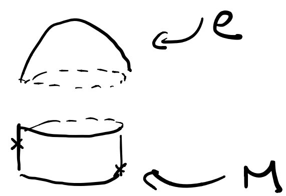


Desenho em S^2:





Desenho em $\mathbb{R}P^2$



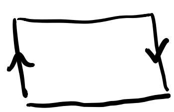
$$D^2 \cong \{(x,y,z) \in S^2 \mid z \geq 1/2\}$$

$$h_e : D^2 \longrightarrow \mathbb{R}P^2 \quad , \quad h_e = \pi\big|_{D^2}$$

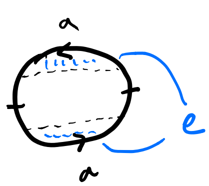
OBS: $h_e\big|_{\mathring{D}^2}$ é homeo pois $p \sim q \iff p = q$

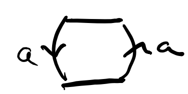
$\forall p, q \in \mathring{D}^2 \subset S^2$

OBS: $\mathbb{R}P^2 - e = A$

$A =$  (Faixa de Möbius)

De fato:

$\mathbb{R}P^2 =$ 

$\rightsquigarrow \mathbb{R}P^2 - e =$ 

Prop: Seja $X = D^n$, ou $X = I^n = [0,1] \times \cdots \times [0,1]$.
Seja $\sim$ uma relação de equivalência em X
tal que $x \sim x' \Rightarrow x = x'$ ou $x, x' \in \partial X \cong S^{n-1}$
(Relação de equivalência em ∂X)

Suponha que $Y = X/\sim$ é Hausdorff e seja $B = \pi(\partial X) \subset Y$.
Então Y é obtido de B colando uma n-célula.

<u>Dem</u>: $I^n \cong D^n$ por um homeo que leva $\partial I^n \cong \partial D^n$. Podemos assumir que $X = D^n$.

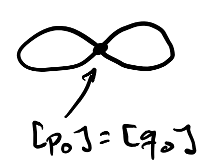
- Seja $h_e = \pi : D^n \longrightarrow Y = D^n/\sim$

$\Rightarrow$ $e = h_e(\mathring{D}^n)$ é uma célula aberta (Não tem identificação em $\mathring{D}^n$)

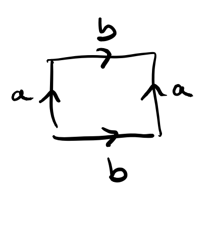
e $Y = e \cup \underbrace{B}_{h_e(\partial D^n)}$, $\underbrace{e \cap B = \phi}_{\text{Não tem identificação entre ptos de } \mathring{D}^n \text{ e } \partial D^n.}$ ∎

<u>Exemplos</u>:

1) T^2 é obtido de $S^1 \vee S^1$ colando uma 2-célula

(onde $S^1 \vee S^1 = (S^1 \sqcup S^1)/_{p_0 \sim q_0}$ 

)

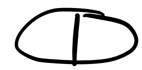
Pois $T^2 =$ 

<u>Exercício</u>: (Para fazer na primeira parte do Trabalho)

- $T_g = \underbrace{T^2 \# \cdots \# T^2}_{g\text{-vezes}}$ é obtido $\underbrace{S^1 \vee \cdots \vee S^1}_{2g\text{-vezes}}$ colando uma 2-célula

- $\mathbb{P}_h = \underbrace{\mathbb{R}P^2 \# \cdots \# \mathbb{R}P^2}_{h\text{-vezes}}$ é obtido de $\underbrace{S^1 \vee \cdots \vee S^1}_{h\text{-vezes}}$ colando uma 2-célula

<u>Exercício</u>: Mostre que

(1) M é obtido de $A =$  colando uma 2-célula

$(S^1 \sqcup I)/\sim$

$p \sim 0,\ q \sim 1$

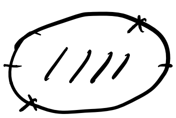
(2) S^2 é obtido de $[0,1]$ colando uma 2-célula

<u>Exemplo</u>: $\mathbb{R}P^n$ é obtido de $\mathbb{R}P^{n-1}$ colando uma n-célula:

$$S^n/_{x\sim -x} = \mathbb{R}P^n$$

Identifique: $D^n = \{(x_0, \dots, x_n) \in S^n \mid x_n \geq 0\}$

$\Rightarrow \mathbb{R}P^n \cong D^n/_\sim$ onde $x \sim y \Leftrightarrow$ $x = y$ ou $x, y \in \partial D^n$, $x = -y$

 $D^n/_\sim$

$\Rightarrow \mathbb{R}P^n = \pi(\partial D^n) \cup e^n$

mas $\pi(\partial D^n) = S^{n-1}/_{x\sim -x} = \mathbb{R}P^{n-1}$