Aula 2 - Topologia Quociente

Seja X um espaço topológico, Y um conjunto e $\pi : X \longrightarrow Y$ uma aplicação sobrejetora.

Então X, π induz uma topologia em Y:

$$U \subset Y \text{ é aberto} \iff \pi^{-1}(U) \subset X \text{ é aberto}$$

Essa é a <u>topologia quociente</u> em Y

<u>Exercício</u>: Verifique que isso é de fato uma topologia

<u>Prop</u>: A topologia quociente é a maior topologia tal que $\pi : X \longrightarrow Y$ é contínua.

<u>Dem</u>: Por definição, $\pi : X \to Y$ é contínua quando colocamos em Y a topologia quociente.

- Seja $\mathcal{T}$ uma topologia em Y tal que $\pi : X \to Y$ é contínua. Se $U \in \mathcal{T} \Rightarrow \pi^{-1}(U)$ é aberto em X logo U é aberto na top. quociente. ∎

<u>Exemplo Principal</u>: Seja $R \subset X \times X$ uma relação de equivalência $(x_1 \sim x_2 \iff (x_1, x_2) \in R)$. Seja

$$Y = X/\sim \; = \{ [x] \mid x \in X \} \quad \text{e} \quad \begin{aligned} \pi : X &\longrightarrow Y \\ x &\longmapsto [x] \end{aligned}$$

OBS: Todos os exemplos são dessa forma:

$\pi : X \to Y$ induz $x_1 \sim x_2 \iff \pi(x_1) = \pi(x_2)$

e $X/\sim \; \cong Y$ (canonicamente)

$[x] \longmapsto \pi(x)$

Prop: Uma função $f: Y \to Z$ é contínua $\iff f \circ \pi : X \to Z$ é contínua

Dem: Seja $U \subset Z$ aberto. Então f é contínua $\iff$

$f^{-1}(U) \subset Y$ é aberto $\underset{\text{def}}{\iff} \pi^{-1}(f^{-1}(U)) \subset X$ é aberto

$\iff f \circ \pi$ é contínua $\blacksquare$

Consequencia: Seja $\sim$ uma relação de equiv. em X, e Z um esp. top. então

$$C(X/\sim, Z) \longleftrightarrow \{ f \in C(X, Z) \mid f(x_1) = f(x_2) \;\; \forall x_1 \sim x_2 \}$$

$$\hat{f} \longmapsto f = \hat{f} \circ \pi$$

$$\hat{f}([x]) = f(x) \longleftarrow\!\shortmid \; f$$

Problema: Mesmo que X seja Hausdorff, em geral $X/\sim$ NÃO SERÁ HAUSDORFF

Exemplo $X = [-1,1]\times\{0\} \sqcup [-1,1]\times\{1\}$

$(t,0) \sim (t,1) \quad \forall\, t \in [-1,0)\cup(0,1]$

$\Rightarrow X/\sim$ Não é Hausdorff (A sequencia $[(\frac{1}{n},0)]$ tem dois limites)

Teorema: Suponha que X é Hausdorff, $\sim$ é uma relação de equivalência e $\pi: X \to X/\sim$ é uma aplicação aberta. Então

$X/\sim$ é Hausdorff $\Longleftrightarrow$ $R = \{(x,y)\in X \mid x\sim y\} \subset X\times X$ é fechado

Dem: Exercício!

Exemplo: $\mathbb{R}P^n = S^n/\sim \qquad p\sim -p$

Note que $S^n \longrightarrow \mathbb{R}P^n$ é aberto pois se $U\subset S^n$ é aberto $\Rightarrow$ $\pi^{-1}(\pi(U)) = U \cup (-U)$ onde

$-U = \{-p\in S^n \mid p\in U\}$ aberto ($m_{-1}: S^n \to S^n$ é Homeo)

Além disso, $R\subset S^n\times S^n$,

$R = \{(p,p) \mid p\in S^n\} \cup \{(p,-p) \mid p\in S^n\}$ é fechado

$\Rightarrow \mathbb{R}P^n$ é Hausdorff.

Exercício: Mostre que todos os quocientes da aula 1 são Hausdorff

Exercício Considere a seguinte relação de equivalência em S^{2n-1}:

- $S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$, $S^{2n-1} = \{(w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{C}^n \mid |w_1|^2 + \dots + |w_n|^2 = 1\}$
- $S^1 \subset \mathbb{C}$, $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$

$$(w_1, \dots, w_n) \sim (z w_1, \dots, z w_n), \quad z \in S^1$$

Mostre que $S^{2n-1}/\sim$ é Hausdorff.

OBS: $S^{2n-1}/\sim = \mathbb{C}P^{n-1}$ é o espaço projetivo complexo.

Outra descrição: $\mathbb{C}P^n = \{\ell \subset \mathbb{C}^{n+1} \mid \dim_{\mathbb{C}} \ell = 1\} =$

$$= \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}/\sim \quad \text{onde}$$

$$(w_0, \dots, w_n) \sim (\lambda w_0, \dots, \lambda w_n), \quad \lambda \in \mathbb{C}^*$$

Exercício: Mostre que $\mathbb{C}P^1 \cong S^2$

Mais Exemplos de Espaço Quociente

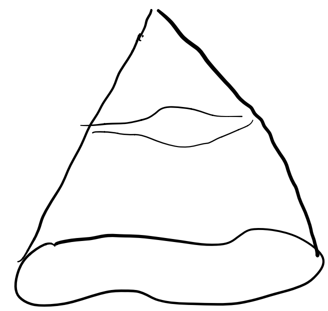
- Seja X espaço topológico e $A \subset X$

$$X/A = X/\sim \quad \text{onde} \quad x \sim y \iff \begin{cases} x = y \\ \text{ou} \\ x, y \in A \end{cases}$$

Exemplo: $S^n \cong D^n/\partial D^n$

Exemplo (Cone sobre X)

$$C(X) = (X \times I)/_{X \times \{1\}}$$



Exemplo: $C(S^{n-1}) \cong D^n$

Dem: $f : C(S^{n-1}) \longrightarrow D^n$

$$f[(x,t)] = (1-t)x$$

- f é contínua pois $f \circ \pi : S^{n-1} \times I \longrightarrow D^n$, $(x, t) \mapsto (1-t)x$ é contínua

- f está bem definido pois

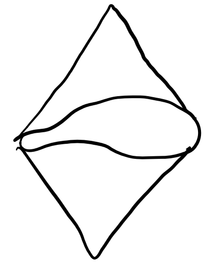
$$[(x,t)] = [(y,s)] \iff \begin{cases} (x,t) = (y,s) \\ \text{ou} \\ t = s = 1 \end{cases}$$

e nesse caso $f([x,t]) = f([y,s])$

- f é bijeção (exercício!) contínua de compacto em Hausdorff $\Rightarrow$ f é homeo.

Exemplo: (suspensão de X)

$$S(X) = C(X)/_{X \times \{0\}}$$



Exercício: Mostre que $S(S^{n-1}) \cong S^n$ $\forall n \geq 1$

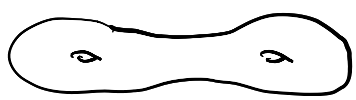
Construção: Sejam X e Y espaços topológicos, $A \subset X$ e $f: A \to Y$ (contínua)

$$X \cup_f Y = (X \sqcup Y)/\sim \quad \text{onde} \quad a \in A \sim f(a) \in Y$$

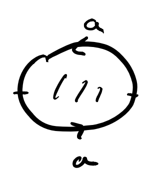
Exemplo: Seja $X = T^2$, $Y = T^2$, $D \subset T^2$ como na figura

seja $f: \partial D \to \partial D$ um homeo (a identidade p/ exemplo)

$$\Rightarrow \quad X \# Y = (X - \mathrm{int}(D)) \cup_f (Y - \mathrm{int}(D))$$

$X \# Y \cong$  (bi-toro)

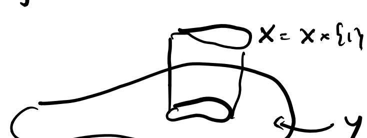
Exemplo $X = D^2$, $A = \partial D^2 = S^1$, $Y = S^1$, $f: S^1 \to S^1$, $z \mapsto z^2$

$\Rightarrow \quad X \cup_f Y \cong \mathbb{R}P^2 =$ 

Exemplo: (Mapping Cylinder)

Seja $f: X \to Y$, $f: X \times \{0\} \subset X \times I \to Y$

$\Rightarrow \quad M_f = (X \times I) \cup_f Y$



<u>Exemplo</u>: (Mapping Cone)

$$f : X \longrightarrow Y, \qquad C_f = M_f / X \times \{1\}$$

<u>OBS</u>: Esses últimos exemplos vão aparecer em algumas construções ao longo do curso.