Aula 14:

Nesta aula, X é um espaço conexo por caminhos, localmente conexo por caminhos e localmente semi-simplesmente conexo.

Lembre que:

① X admite um recobrimento universal

$$\tilde{p} : \tilde{X} \longrightarrow X \qquad (\tilde{X} \text{ é } 1\text{-conexo})$$

② $\pi_1(X, x_0) \circlearrowright \tilde{X}$. A ação é propriamente descontínua

e $X = \tilde{X} / \pi_1(X, x_0)$

③ $\tilde{X} \xrightarrow{\tilde{p}} X$ é um recobrimento regular e $Aut(\tilde{X}) = \pi_1(X, x_0)$

• VOU MUDAR MINHA NOTAÇÃO:

$$\alpha * \beta(s) = \begin{cases} \alpha(2s) & 0 \leq s \leq 1/2 \\ \beta(2s-1) & 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases}$$

A Diferença é que a ação de $\pi_1(X, x_0)$ em $p^{-1}(x_0)$ é agora uma ação à direita:

$$e \cdot [\alpha] = \tilde{\alpha}_e(1)$$

Isso é mais natural neste pois a ação de $Aut(E)$ em $p^{-1}(x_0)$ é à esquerda e comuta com a ação de $\pi_1(X, x_0)$: Se $\phi \in Aut(E)$ então

$$\phi(e \cdot [\alpha]) = \phi(e) \cdot [\alpha] \qquad \text{(Prop. 1 da última aula)}$$

ISSO VAI FACilitar a minha (nossa) vida evitando ter que escrever inversas em todos os lugares.

Seja G um grupo.

<u>Def</u>: Um <u>recobrimento G-regular de X</u> é um recobrimento $p: E \to X$ tal que $Aut(E) = G$

<u>OBS</u>: Regular = $G \circlearrowright p^{-1}(x)$ de maneira transitiva para todo $x \in X$.

- Suponha que $p: E \to X$ é um recobrimento G-regular
- $G \circlearrowright p^{-1}(x_0)$ é uma ação livre e transitiva:
  - transitiva pq é regular
  - livre: suponha que $g \cdot e = e$. Seja $E^0 \subset E$ a componente conexa por caminhos de e em E. Então $p|_{E^0}: E^0 \to X$ é recobrimento e $\begin{array}{l} E^0 \to E^0 \\ e \mapsto g \cdot e \end{array}$ é levantamento de $p|_{E^0}$. Logo, por unicidade, $g \cdot e = e \Rightarrow g = 1d_G$.

<u>Prop</u>: Dado $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$, dado $e_0 \in p^{-1}(x_0)$, $\exists!$ $\phi_{[\alpha]} \in G$ tal que

$$\phi_{[\alpha]}(e_0) = e_0 \cdot [\alpha]$$

Além disso,
$$\begin{array}{rcl} \Psi: \pi_1(X, x_0) & \longrightarrow & G \\ [\alpha] & \longmapsto & \phi_{[\alpha]} \end{array}$$
é homomorfismo.

<u>Dem</u>: Dado $e_0 \in p^{-1}(x_0)$, existe um único $\phi_{[\alpha]} \in G$ tal que $\phi_{[\alpha]}(e_0) = e_0 \cdot [\alpha]$ (pois $G \circlearrowright p^{-1}(x_0)$ de forma livre e transitiva)

Para ver que Ψ é homomorfismo, note que

$$\phi_{[\alpha]} \circ \phi_{[\beta]}(e_0) = \phi_{[\alpha]}(e_0 \cdot [\beta]) = \phi_{[\alpha]}(e_0) \cdot [\beta] = (e_0 \cdot [\alpha]) \cdot [\beta] =$$
$$= e_0 \cdot ([\alpha][\beta]) = \phi_{[\alpha][\beta]}(e_0)$$

ou seja, $\phi_{[\alpha]} \circ \phi_{[\beta]} = \phi_{[\alpha] \cdot [\beta]}$ ∎

O objetivo agora é construir para cada $\varphi \in \pi_1(X, x_0)$, um recobrimento G-regular $p: E \to X$, com $e_0 \in p^{-1}(x_0)$ tal que $\Psi([\alpha]) = \phi_{[\alpha]}$ onde

$$\phi_{[\alpha]}(e_0) = e_0 \cdot [\alpha]$$

Dado $\varphi \in \mathrm{Hom}(\pi_1(X, x_0), G)$, defina

$$E = \frac{\tilde{X} \times G}{\pi_1(X, x_0)} \quad \text{onde} \quad (\tilde{x}, g) \cdot [\alpha] = (\tilde{x} \cdot [\alpha],\ g\, \varphi([\alpha])^{-1})$$

(G tem a topologia discreta)

Denotamos os elementos de E por $[\tilde{x}, g]$

Seja $p: E \to X$, $p([\tilde{x}, g]) = \tilde{p}(\tilde{x})$ (bem definido pois $\tilde{p}(\tilde{x} \cdot [\alpha]) = \tilde{p}(\tilde{x})$ $\forall \tilde{x} \in \tilde{X}$, $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$)

Afirmação 1: $p: E \to X$ é recobrimento

Dem: Seja $U \subset X$ aberto uniformemente recoberto para o recobrimento universal $\tilde{p}: \tilde{X} \to X$.

$$\Rightarrow p^{-1}(U) = \{[\tilde{x}, g] \mid \tilde{p}(\tilde{x}) \in U,\ g \in G\}$$

Se $V \subset \tilde{X}$ é uma placa de $\tilde{p}: \tilde{X} \to X$

$$\Rightarrow \tilde{p}^{-1}(U) = \{\tilde{x} \cdot [\alpha] \mid \tilde{x} \in V,\ [\alpha] \in \pi_1(X, x_0)\}$$

Logo

$$p^{-1}(U) = \{[\tilde{x} \cdot [\alpha], g] \mid \tilde{x} \in V,\ [\alpha] \in \pi_1(X, x_0),\ g \in G\} =$$

$$= \{[\tilde{x}, g \cdot \varphi([\alpha])] \mid \tilde{x} \in V,\ [\alpha] \in \pi_1(X, x_0),\ g \in G\} = \{[\tilde{x}, g] \mid \tilde{x} \in V,\ g \in G\} =$$

$$= \coprod_{g\in G} \overline{V}_g \quad \text{onde} \quad \overline{V}_g \subset E, \quad \overline{V}_g = \{[\tilde{x}, g] \mid \tilde{x} \in V\}$$ (aberto! exercício!)

Note que $\overline{V}_g \xrightarrow{\eta} V$ é homeo e

$$[\tilde{x}, g] \longmapsto \tilde{x}$$

$$p|_{\overline{V}_g} = \tilde{p}|_V \circ \eta \Rightarrow p|_{\overline{V}_g} : \overline{V}_g \to U \text{ é homeo } \blacksquare$$

<u>Afirmação 2</u> E é G-regular

Note que $G \circlearrowright p^{-1}(x) \ \forall x \in X$:

$$g' \cdot [\tilde{x}, g] = [\tilde{x}, g'g]$$

Essa ação é por automorfismos do recobrimento:

$$p(g' \cdot [\tilde{x}, g]) = p([\tilde{x}, g'g]) = \tilde{p}(\tilde{x}) = p([\tilde{x}, g])$$

Logo, temos $\varphi : G \longrightarrow Aut(E)$

$$g' \mapsto \varphi_{g'} : E \to E$$
$$[\tilde{x}, g] \mapsto [\tilde{x}, g'g]$$

- Vamos ver que φ é injetora:

Suponha que $\varphi_{g'} = Id_E$

$\Rightarrow [\tilde{x}, g'g] = [\tilde{x}, g] \quad \forall \tilde{x}, \forall g$

$$\Rightarrow \begin{cases} \tilde{x} = \tilde{x} \cdot [\alpha] \\ g'g = g\,\psi([\alpha])^{-1} \end{cases} \Rightarrow [\alpha] = [c_{x_0}] \Rightarrow g' = 1$$

• Por outro lado, φ é sobrejetora:

Seja $\phi \in Aut(E)$, então $\phi([\tilde{x}_0, 1]) \in p^{-1}(x_0) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \phi([\tilde{x}_0, 1]) = [\tilde{x}_0 \cdot [\alpha], g] \quad \text{para algum } [\alpha] \in \pi_1(X, x_0),\ g \in G$$

$$\Rightarrow \phi([\tilde{x}_0, 1]) = [\tilde{x}_0, g\,\psi([\alpha])] = g \cdot \psi([\alpha]) \cdot [\tilde{x}_0, 1]$$

$$= \varphi_{g\cdot\psi([\alpha])}([\tilde{x}_0, 1])$$

Por unicidade, $\phi = \varphi_{g\cdot\psi([\alpha])}$

• Falta mostrar que a ação $G \circlearrowright p^{-1}(x)$ é transitiva nas fibras:

Mas $\tilde{p}([\tilde{x}, g]) = \tilde{p}([\tilde{y}, h]) \Rightarrow p(\tilde{x}) = p(\tilde{y}) \Rightarrow \tilde{y} = \tilde{x} \cdot [\alpha]$

$$\Rightarrow [\tilde{y}, h] = [\tilde{x}[\alpha], h] = [\tilde{x}, h\,\psi([\alpha])] = h \cdot \psi([\alpha]) \cdot g^{-1} \cdot [\tilde{x}, g]$$

<u>Afirmação 3</u>: Dado $e_0 = [[c_{x_0}], 1] \in p^{-1}(x_0)$, temos que

$\psi : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow G$ é dado por $\psi([\alpha]) = g$ onde

$e_0 \cdot [\alpha] = g \cdot e_0$

De fato, $\psi[\alpha] \cdot [[c_{x_0}], 1] = [[c_{x_0}], \psi([\alpha])]$

Por outro lado

$$\tilde{\alpha}_{e_0}(t) = [[\alpha_t], 1] \quad \text{onde} \quad \alpha_t(s) = \alpha(ts)$$

Por unicidade

$$\Rightarrow e_0 \cdot [\alpha] = \tilde{\alpha}_{e_0}(1) = [[\alpha], 1] = [[c_{x_0}], \psi([\alpha])] = \psi[\alpha] \cdot e_0.$$

<u>Conclusão</u>: Dado $\psi \in \mathrm{Hom}(\pi_1(X,x_0), G)$ existe um G-recobrimento regular $p: E \to X$ e $e_0 \in p^{-1}(x_0)$ tal que

$$\begin{aligned} \pi_1(X,x_0) &\longrightarrow G \\ [\alpha] &\longmapsto g \end{aligned}, \quad e_0[\alpha] = g\, e_0$$

coincide com ψ.

<u>Afirmação 4</u>: Suponha que

- $(E,e_0) \xrightarrow{p} (X,x_0)$ seja um G-recobrimento regular que corresponde à $\psi \in \mathrm{Hom}(\pi_1(X,x_0), G)$.

Então existe um único isomorfismo de G-recobrimentos (*)

$$\varphi : \frac{\tilde{X} \times G}{\underbrace{\pi_1(X,x_0)}} \longrightarrow E \quad \text{tal que} \quad \varphi(([c_{x_0}],1)) = e_0$$

Usa ψ na definição

(*)

$$\begin{tikzcd} \frac{\tilde{X}\times G}{\pi_1(X,x_0)} \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "p'"'] & & E \arrow[dl, "p"] \\ & X & \end{tikzcd}, \quad \varphi \text{ homeo}, \quad \overbrace{\varphi(g\cdot[\tilde{x},h]) = g\,\varphi([\tilde{x},h])}^{\varphi \text{ é } G\text{-equivariante}}.$$

- <u>Existência</u>:

- $\varphi([\underbrace{[\gamma]}_{\tilde{X}}, \underbrace{g}_{G}]) = g \cdot \left((\widetilde{p\circ\gamma})_{e_0}(1) \right)$ (Mostre que é homeo!!!)

- <u>Unicidade</u>:

Se restringimos φ para a componente conexa p/ caminhos de $([c_{x_0}], 1)$ então φ é levantamento de p' e portanto é determinado por seu valor em um ponto.

- Unicidade segue de G-equivariância

<u>Conclusão</u>:

- $\left\{ \begin{array}{l} \text{G-recobrimentos regulares} \\ (E, e_0) \longrightarrow (X, x_0) \end{array} \right\} \Big/ \cong \quad \xleftrightarrow{1-1} \quad \mathrm{Hom}(\pi_1(X, x_0), G)$

- Se $\Psi_{(E,e_0)} = \Psi_{(F,f_0)} \Rightarrow \exists!$ iso de G-recobrimentos

$$\begin{tikzcd} (E, e_0) \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "p_E"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & (F, f_0) \arrow[dl, "p_F"] \\ & (X, x_0) & \end{tikzcd}$$