Aula 13:

- Seja $p: E \to X$ um recobrimento.

Def: Um Automorfismo de $p: E \to X$ (ou uma transformação de Deck) é um homeo $\phi: E \to E$ tal que $p \circ \phi = p$

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "p"'] & & E \arrow[dl, "p"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

OBS: $Aut(E) = Aut(E, p, X)$ é um grupo (Exercício!)

Prop: Seja $e_0 \in p^{-1}(x_0)$ e $\phi \in Aut(E)$. Se $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$

$\Rightarrow \quad \phi([\alpha] \cdot e_0) = [\alpha] \cdot \phi(e_0)$

(**OBS**: $[\alpha] \cdot e = \tilde{\alpha}_e(1)$)

Dem: Note que $\phi \circ \tilde{\alpha}_{e_0}$ é um levantamento de α que começa em $\phi(e_0)$. Logo, por unicidade de levantamento, temos que $\tilde{\alpha}_{\phi(e_0)} = \phi \circ \tilde{\alpha}_{e_0}$

$$\Rightarrow \quad [\alpha] \cdot \phi(e_0) = \tilde{\alpha}_{\phi(e_0)}(1) = \phi(\tilde{\alpha}_{e_0}(1)) = \phi([\alpha] \cdot e_0) \quad \blacksquare$$

Lembre que se $H < G$ é um subgrupo, o normalizador de H em G é

$$N(H) = \{ g \in G \mid gHg^{-1} = H \}$$

- $N(H)$ é o maior subgrupo de G tal que $H \triangleleft N(H)$ (H é normal em $N(H)$).

• A partir daqui todos os espaços são conexos por caminhos e localmente conexos por caminhos.

Teorema: Seja $p: E \to X$ recobrimento. Sejam $e_0, e \in p^{-1}(x_0)$. As seguintes afirmações são equivalentes:

(1) $\exists\, \phi \in Aut(E)$ tal que $\phi(e_0) = e$

(2) $\exists\, [\alpha] \in \underbrace{N(p_*(\pi_1(E,e_0)))}_{\text{Normalizador em } \pi_1(X,x_0)}$ tal que $[\alpha] \cdot e_0 = e$

(3) $p_*(\pi_1(E,e_0)) = p_*(\pi_1(E,e))$

Dem:

$(1) \Leftrightarrow (3)$:

Um automorfismo $\phi: E \to E$ é em particular um levantamento de $p: E \to X$:

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ E \arrow[ur, "\phi"] \arrow[r, "p"'] & X \end{tikzcd}$$

Logo $\exists!\, \phi \in Aut(E)$, $\phi(e_0) = e \iff p_* \pi_1(E,e_0) \subset p_* \pi_1(E,e)$.

Assim, se $p_*(\pi_1(E,e_0)) = p_*(\pi_1(E,e))$, então existe

$\phi, \phi' : E \to E$ tais que $\phi(e_0) = e$, $\phi'(e) = e_0$

Mas nesse caso, $\phi \circ \phi'(e) = e$, $\phi' \circ \phi(e_0) = e_0 \Rightarrow \phi' = \phi^{-1}$

Ou seja $(3) \Rightarrow (1)$.

Por outro lado, se $\phi \in Aut(E)$, $\phi(e_0) = e \Rightarrow \phi^{-1} \in Aut(E)$, $\phi^{-1}(e) = e_0$

$\Rightarrow p_* \pi_1(E,e_0) = p_* \pi_1(E,e)$ //

Para provar que (2) $\Leftrightarrow$ (3) precisamos do seguinte Lema: 3

Lema: Seja $J_e = \{[\gamma] \in \pi_1(X, x_0) \mid [\gamma]\cdot e = e\}$ (Isotropia em e da ação de $\pi_1(X,x_0)$)

Então

$$J_{[\alpha]\cdot e_0} = [\alpha]\, J_{e_0}\, [\alpha^{-1}]$$

Dem: Se $J_{[\alpha]\cdot e_0} = \{[\beta] \in \pi_1(X, x_0) \mid [\beta]\cdot[\alpha]\cdot e_0 = [\alpha]\cdot e_0\}$

$= \{[\beta] \mid [\alpha^{-1}][\beta][\alpha]\cdot e_0 = e_0\}$

Ou seja $[\beta] \in J_{[\alpha]\cdot e_0} \Leftrightarrow [\alpha]^{-1}[\beta][\alpha] \in J_{e_0} \Leftrightarrow [\beta] \in [\alpha] J_{e_0} [\alpha]^{-1}$ //

De volta ao teorema:

(2) $\Rightarrow$ (3): Suponha que $\exists\, [\alpha] \in N(p_*(\pi_1(X,x_0)))$ tal que $[\alpha]\cdot e_0 = e$. Note que $J_{e_0} = p_*(\pi_1(E,e_0))$, $J_e = J_{[\alpha]\cdot e_0} = p_*\pi_1(E,e)$

$\Rightarrow \quad p_*\pi_1(E,e) = [\alpha]\, p_*\pi_1(E,e_0)\, [\alpha^{-1}] = p_*\pi_1(E,e_0)$

$[\alpha] \in N(p_*\pi_1(E,e_0))$ //

(3) $\Rightarrow$ (2): $p_*(\pi_1(E,e_0)) = p_*(\pi_1(E,e)) \Leftrightarrow J_{e_0} = J_e$

Seja $[\alpha] = [p\circ\gamma]$ onde $\gamma: I \to E$, $\gamma(0) = e_0$, $\gamma(1) = e$

(ou seja $[\alpha] \in \pi_1(X,x_0)$, $[\alpha]\cdot e_0 = e$)

$\Rightarrow \quad J_{e_0} = J_e = J_{[\alpha]\cdot e_0} = [\alpha]\, J_{e_0}\, [\alpha]^{-1}$

$\Rightarrow \quad [\alpha] \in N(J_{e_0}) = N(p_*\pi_1(E,e_0))$ ∎

Corolário: $\mathrm{Aut}(E)$ age transitivamente em $p^{-1}(x_0)$

$\iff$ $p_*(\pi_1(X,x_0)) \triangleleft \pi_1(X,x_0)$

subgrupo normal

Def: Um recobrimento $p: E \to X$ é regular (ou normal) se $\mathrm{Aut}(E)$ age transitivamente nas fibras de $p: E \to X$.

(ou seja, se $p_*\pi_1(E,e) \triangleleft \pi_1(X,p(e))$ $\forall e \in E$)

Corolário: Para cada $[\alpha] \in N(p_*\pi_1(E,e_0))$, $\exists!\ \phi_{[\alpha]} \in \mathrm{Aut}(E)$ tal que $\phi_{[\alpha]}([\alpha]\cdot e_0) = e_0$. A aplicação

$$\begin{aligned} \Theta : N(p_*\pi_1(X,x_0)) &\longrightarrow \mathrm{Aut}(E) \\ [\alpha] &\longmapsto \phi_{[\alpha]} \end{aligned}$$

é um homorfismo de grupos

Dem: Exercício! basta abrir as definições

Teorema Se $p: E \to X$ é recobrimento com E, X conexos por caminhos e localmente conexos por caminhos então

$$\Theta : N(p_*(\pi_1(E,e_0))) \longrightarrow \mathrm{Aut}(E)$$

é sobrejetor e $\ker \Theta = p_*(\pi_1(E,e_0))$. Em particular,

$$\mathrm{Aut}(E) \cong \frac{N(p_*\pi_1(E,e_0))}{p_*(\pi_1(E,e_0))}$$

Dem:

•) Θ é sobrejetor:

Seja $\phi \in Aut(E)$, $\phi(e_0) = e$. Seja $\gamma : I \to E$, $\gamma(0) = e$

$\gamma(1) = e_0$. Então $[\alpha] = [p \circ \gamma] \in N(p_* \pi_1(E, e_0))$ (Veja a demonstração do Teorema $*$ $(3) \Rightarrow (2)$)

e $[\alpha] \cdot e = e_0 \Rightarrow \underbrace{\phi_{[\alpha]}([\alpha] \cdot e)}_{= \phi_{[\alpha]}(e_0)} = e = \phi(e_0)$

$\Rightarrow \phi_{[\alpha]} = \phi$.

•) Se $[\alpha] \in \ker \Theta \Rightarrow \phi_{[\alpha]} = Id_E \Rightarrow \underbrace{\phi_{[\alpha]}([\alpha] \cdot e_0)}_{= [\alpha] \cdot e_0} = e_0$

$\Rightarrow [\alpha] \cdot e_0 = e_0 \Rightarrow [\alpha] \in p_* \pi_1(E, e_0) \Rightarrow \ker \Theta \subset p_*(\pi_1(E, e_0))$

Reciprocamente, se $[\alpha] \in p_*(\pi_1(E, e_0)) \Rightarrow [\alpha] \cdot e_0 = e_0 \Rightarrow$

$\underbrace{\phi_{[\alpha]}([\alpha] \cdot e_0)}_{= \phi_{[\alpha]}(e_0)} = e_0 \Rightarrow \phi_{[\alpha]}(e_0) = Id_E(e_0) \Rightarrow \phi_{[\alpha]} = Id_E$

$\Rightarrow p_* \pi_1(E, e_0) \subset \ker \Theta$ ∎

Corolário: Se $p: E \to X$ é regular $\Rightarrow Aut(E) \cong \dfrac{\pi_1(X, x_0)}{p_*(\pi_1(E, e_0))}$

Corolário: Se $p: \tilde{X} \to X$ é recobrimento universal $\Rightarrow Aut(\tilde{X}) \cong \pi_1(X, x_0)$