Aula 12 : Recobrimento Universal

OBJETIVO: Classificar todos os recobrimentos de X

NESTA AULA: $\left[\begin{array}{l}\bullet\ X \text{ é conexo p/ caminhos} \\ \bullet\ X \text{ é localmente conexo p/ caminhos}\end{array}\right.$

Teorema: Suponha que $p: \tilde{X} \to X$ seja um recobrimento onde $\tilde{X}$ é 1-conexo. Seja $q: E \to X$ um recobrimento onde E é conexo. Sejam $\tilde{x}_0 \in X$, $e_0 \in E$ tais que $p(\tilde{x}_0) = q(e_0) = x_0 \in X$. Então existe um único recobrimento $\tilde{p}: \tilde{X} \to E$ tal que $\tilde{p}(\tilde{x}_0) = e_0$, $q \circ \tilde{p} = p$

Dem: Considere o diagrama

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "q"] \\ \tilde{X} \arrow[ur, dashed, "\tilde{p}"] \arrow[r, "p"'] & X \end{tikzcd}$$

Note que $\tilde{X}$ é conexo por caminhos e localmente conexo por caminhos (pois $\tilde{X}$ é localmente homeomorfo à X)

Como $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = \{1\} \Rightarrow p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) \subset q_*(\pi_1(E, e_0)) \Rightarrow$ existe um único levantamento $\tilde{p}: \tilde{X} \to E$ tal que $\tilde{p}(\tilde{x}_0) = e_0$.

Afirmo que $\tilde{p}$ é recobrimento:

Seja $e \in E$ e $V \subset E$ uma placa do recobrimento $q: E \to X$, tal que $e \in V$.

$\Rightarrow \tilde{p}^{-1}(V) = \coprod_{\lambda_i \in I \subset \Lambda} W_{\lambda_i}$ onde W_{λ_i} são as placas de $p: \tilde{X} \to X$ tais que $\tilde{p}(W_{\lambda_i}) = V$. Note que $\tilde{p}|_{W_{\lambda_i}} = q|_{q(V)}^{-1} \circ p|_{W_{\lambda_i}}$ homeo ∎

Corolário: Se $p:\tilde{X}\to X$, e $q:E\to X$ são recobrimentos 1-conexos, e $\tilde{x}_0\in\tilde{X}$, $e_0\in E$, $p(\tilde{x}_0)=q(e_0)$, então existe um único homeomorfismo $\varphi:\tilde{X}\to E$ tal que $\varphi(\tilde{x}_0)=e_0$ e

$$\begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "p"'] & & E \arrow[dl, "q"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Dem: Basta usar o teorema varias vezes: $\varphi=\tilde{p}$, $\varphi^{-1}=\tilde{q}$:

$$\begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[r, "\tilde{p}"] \arrow[dr] & E \arrow[r, "\tilde{q}"] \arrow[d] & \tilde{X} \arrow[r, "\tilde{p}"] \arrow[dl] & E \arrow[dll] \\ & X & & \end{tikzcd}$$

, por unicidade $\begin{cases} \tilde{q}\circ\tilde{p}=Id_{\tilde{X}} \\ \tilde{p}\circ\tilde{q}=Id_E \end{cases}$

■

OBS/Definição: Se $p_1:E_1\to X$, $p_2:E_2\to X$ são recobrimentos, então um <u>morfismo de recobrimentos</u> entre p_1 e p_2 é $\varphi:E_1\to E_2$ contínua t.q.

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "p_1"'] & & E_2 \arrow[dl, "p_2"] \\ & X & \end{tikzcd}.$$

(Mostre que E_2 conexo $\Rightarrow$ $\varphi:E_1\to E_2$ é um recobrimento)

Def: Um recobrimento 1-conexo de X é chamado de <u>recobrimento universal</u>.

Pergunta: Todo espaço admite um recobrimento universal?

Note que se $p:\tilde{X}\to X$ é um recobrimento 1-conexo, e $U\subset X$ é aberto uniformemente recoberto, então

$$i_*:\pi_1(U,x)\longrightarrow \pi_1(X,x) \qquad (i:U\hookrightarrow X)$$

é trivial. De fato, se $[\alpha]\in\pi_1(U,x) \Rightarrow i\circ\alpha: I\to X$ é um laço contido em U. Seja $\tilde{x}\in p^{-1}(x)$.

$\Rightarrow \quad \widetilde{i\circ\alpha}_{\tilde{x}} = p\big|_V^{-1}\circ(i\circ\alpha) \qquad$ (V placa de p que contém $\tilde{x}$)

$\Rightarrow \quad \widetilde{i\circ\alpha}_{\tilde{x}}(1) = p\big|_V^{-1}(x) = \tilde{x} \quad \Rightarrow \quad i\circ\alpha \sim c_x \text{ rel } \partial I.$

<u>Def</u>: X é <u>localmente semi-simplesmente conexo</u> se $\forall x\in X$, $\exists$ viz $U\subset X$ tal que $i_*:\pi_1(U,x)\to\pi_1(X,x)$ é trivial.

Vamos mostrar que se X é conexo p/ caminhos, localmente conexo p/ caminhos e localmente semi-simplesmente conexo então X admite recobrimento universal.

<u>Ideia</u>: Se $p:\tilde{X}\to X$ é recobrimento 1-conexo, e $\tilde{x}_0\in\tilde{X}$, $p(x_0)=X$, então, para cada $\tilde{x}\in\tilde{X}$, $\exists!\,[\gamma]$ tal que

$$\tilde{\gamma}_{\tilde{x}_0}(1)=\tilde{x} \qquad (\gamma: I\to X,\ \gamma(0)=x_0,\ \gamma(1)=x)$$

OBJETIVO: Usar essa bijeção p/ descrever $\tilde{X}$ em termos somente de X

- Seja $\tilde{X} = \{[\gamma] \mid \gamma : I \to X,\ \gamma(0) = x_0\}$ (homotopia relativa à ∂I)
- Seja $p : \tilde{X} \to X$, $[\gamma] \mapsto \gamma(1)$ (Sobrejetor pois X é conexo por caminhos)

Queremos definir uma topologia em $\tilde{X}$ de forma que $p : \tilde{X} \to X$ seja recobrimento 1-conexo. Vamos precisar dos seguintes resultados:

① Seja $\mathcal{U} = \{U \subset X \mid U$ é conexo por caminhos e $\pi_1(U) \to \pi_1(X)$ é trivial$\}$

Então $\mathcal{U}$ é base p/ topologia de X.

De fato, se V é conexo p/ caminhos e $V \subset U$ onde $U \in \mathcal{U}$, então

$$\begin{tikzcd} \pi_1(V) \arrow[rr, "i_*"] \arrow[dr, "j_*"'] & & \pi_1(X) \\ & \pi_1(U) \arrow[ur, "k_*"'] & \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow$ $i_* = k_* \circ j_*$ $\Rightarrow$ i_* é trivial

$\Rightarrow$ $V \in \mathcal{U}$

Logo, dado $W \subset X$ aberto, $x \in X$, $U \in \mathcal{U}$ viz de x

$\Rightarrow$ $U \cap W \subset W$ é aberto t.q. $\pi_1(U \cap W) \to \pi_1(X)$ é trivial. Se $V \subset U \cap W$ é viz. 1-conexa de x

$\Rightarrow$ $V \subset W$, $V \in \mathcal{U}$ $\Rightarrow$ $\mathcal{U}$ é base. //

- Dado $U \in \mathcal{U}$ e $\gamma : I \to X$, $\gamma(0) = x_0$, $\gamma(1) \in U$.

Seja $U_{[\gamma]} = \{[\eta * \gamma] \mid \eta(0) = \gamma(1),\ \eta : I \to U\} \subset \tilde{X}$

Note que

$U_{[\gamma]}$ só depende de $[\gamma]$ e Não de γ

pois $\gamma \sim \gamma'$ rel $\partial I \iff \eta * \gamma \sim \eta * \gamma'$ rel $\partial I \quad \forall \eta$

2 $p|_{U_{[\gamma]}} : U_{[\gamma]} \longrightarrow U$ é bijeção pois U é conexo p/ caminhos e $\eta(1) = \eta'(1) \Rightarrow \eta \sim \eta'$ rel ∂I (pois $\pi_1(U) \to \pi_1(X)$ é trivial)
$(\eta(0) = \eta(0))$

3 $[\gamma'] \in U_{[\gamma]} \Longrightarrow U_{[\gamma']} = U_{[\gamma]}$:

$[\gamma'] \in U_{[\gamma]} \Rightarrow [\gamma'] = [\eta * \gamma]$ Logo

$[\alpha] \in U_{[\gamma']} \Rightarrow [\alpha] = [\mu * \gamma'] = [(\mu * \eta) * \gamma] \Rightarrow [\alpha] \in U_{[\gamma]}$

$[\beta] \in U_{[\gamma]} \Rightarrow [\beta] = [\mu * \gamma] = [(\mu * \bar{\eta}) * \gamma'] \Rightarrow [\beta] \in U_{[\gamma']}$

4 $\tilde{\mathcal{U}} = \{ U_{[\gamma]} \mid U \in \mathcal{U},\ \gamma : I \to X,\ \gamma(0) = x_0,\ \gamma(1) \in U \}$

é base de uma topologia em $\tilde{X}$

Suponha que $[\alpha] \in U_{[\gamma]} \cap V_{[\gamma']}$

$\Rightarrow U_{[\gamma]} = U_{[\alpha]},\ V_{[\gamma']} = V_{[\alpha]} \Rightarrow U_{[\gamma]} \cap V_{[\gamma']} = U_{[\alpha]} \cap V_{[\alpha]}$

Seja $W \in \mathcal{U}$, $\alpha(1) \in W$, $W \subset U \cap V$

$\Rightarrow W_{[\alpha]} \subset U_{[\gamma]} \cap V_{[\gamma']} = U_{[\alpha]} \cap V_{[\alpha]}$

⑤ Consideramos $\tilde{X}$ com a topologia gerada por $\tilde{\mathcal{U}}$.

$p|_{U_{[\gamma]}} : U_{[\gamma]} \longrightarrow U$ é homeo:

- Seja $V \subset U$, $V \in \mathcal{U}$, e $\alpha : I \to X$, $\alpha(0) = x_0$, $\alpha(1) \in V$

$\Rightarrow p|_{U_{[\gamma]}}^{-1}(V) = p|_{U_{[\alpha]}}^{-1}(V) = V_{[\alpha]}$ aberto $\Rightarrow p|_{U_{[\gamma]}}$ contínuo

- Seja $V_{[\alpha]} \subset U_{[\gamma]} = U_{[\alpha]} \Rightarrow p|_{U_{[\gamma]}}(V_{[\alpha]}) = p|_{U_{[\alpha]}}(V_{[\alpha]}) = V$

$\Rightarrow p|_{U_{[\gamma]}}$ é aberto

⑥ Seja $U \in \mathcal{U}$ e $x \in U$

$\Rightarrow p^{-1}(U) = \coprod_{[\gamma] \in \Lambda} U_{[\gamma]}$ $\quad \Lambda = \{[\gamma] \mid \gamma(0) = x_0, \gamma(1) = x\}$

Se $[\alpha] \in U_{[\gamma]} \cap U_{[\gamma']} \Rightarrow [\alpha] = [\eta * \gamma] = [\mu * \gamma']$

$\eta : I \to U$, $\mu : I \to U$

$\Rightarrow [\gamma] = [(\bar{\eta} * \mu) * \gamma'] = [\gamma']$ pois $\pi_1(U) \to \pi_1(X)$ é trivial

$\boxed{\text{Segue que } p : \tilde{X} \to X \text{ é recobrimento}}$

Falta mostrar que é 1-conexo:

7. $\tilde{X}$ é conexo por caminhos:

Seja $[\gamma] \in \tilde{X}$. Seja $\gamma_t : I \to X$, $\gamma_t(s) = \gamma(ts)$

$\Rightarrow$ $t \longmapsto [\gamma_t]$ é caminho ligando $[c_{x_0}]$ à $[\gamma]$

(Mostre que é contínuo!)

$\Rightarrow$ $\tilde{X}$ é conexo por caminhos

8. $\pi_1(\tilde{X}, [c_{x_0}]) = \{1\}$:

Como $p_* : \pi_1(\tilde{X}, [c_{x_0}]) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$ é injetora, basta mostrar que $p_*(\pi_1(\tilde{X}, [c_{x_0}])) = \{1\}$

Note que $[\gamma] \in \operatorname{Im} p_* \Leftrightarrow \tilde{\gamma}_{[c_{x_0}]}(1) = [c_{x_0}]$ (Isso é verdade p/ qualquer recobrimento)

Mas $\tilde{\gamma}_{[c_{x_0}]}(s) = [\gamma_s]$ onde $\gamma_s(t) = \gamma(ts)$

de fato, $[\gamma_0] = [c_{x_0}]$, $p([\gamma_s]) = \gamma_s(1) = \gamma(s)$ $\forall s$

Note que $\tilde{\gamma}_{[c_{x_0}]}(1) = [c_{x_0}] \Leftrightarrow \underset{[\gamma]}{\underset{\shortparallel}{[\gamma_1]}} = [c_{x_0}]$

Logo $[\gamma] \in p_*(\pi_1(\tilde{X}, [c_{x_0}])) \Leftrightarrow [\gamma] = [c_{x_0}]$

$\Rightarrow$ $\pi_1(\tilde{X}, [c_{x_0}]) = \{1\}$ ∎

<u>Exercício</u>: Mostre que $\tilde{X} \circlearrowleft \pi_1(X, x_0)$

$[\gamma] \cdot [\alpha] = [\gamma * \alpha]$ é uma ação prop. desc. tal que $X \cong \tilde{X}/_{\pi_1(X, x_0)}$