Aula 11: Ações de Grupos e Recobrimentos

Ideia: Construir recobrimentos usando ações de grupos

- Seja G um grupo, X um espaço topológico

Def: Uma uma ação à esquerda de G em X é um homomorfismo de grupos $\varphi : G \longrightarrow \text{Homeo}(X)$

Ação à direita: Anti-Homomorfismos: $\varphi(gh) = \varphi(h)\varphi(g)$

Obs: Podemos pensar em φ como uma aplicação

$$\varphi : G \times X \longrightarrow X, \quad \varphi(g,x) = \varphi(g)(x) := gx$$

tal que:
1. $\varphi(g) = \varphi_g : X \to X$ é contínua $\forall g \in G$
2. $g \cdot (hx) = (gh) \cdot x$
3. $e \cdot x = x$ $\qquad e =$ elmto neutro de G

(segue que φ_g é homeo pois $\varphi_g^{-1} = \varphi_{g^{-1}}$)

(Ação à direita: $\varphi : X \times G \to X$, $\varphi(x,g) = xg$, $(xg)h = x(gh)$, $x \cdot 1 = x$)

Dada uma ação $\varphi : G \times X \to X$, definimos:

- **Isotropia da ação em $x \in X$**

$$G_x = \{g \in G \mid gx = x\} \subset G \quad (\text{subgrupo})$$

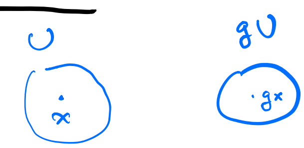
- **Orbita da ação passando por $x \in X$**

$$\mathcal{O}_x = \{gx \in X \mid g \in X\} \subset X$$

- **Espaço das órbitas**: $X/_G = \{\mathcal{O}_x \mid x \in X\} = X/\sim$

onde $x \sim y \iff \exists g \in G$ t.q. $y = gx$ (com a topologia quociente)

Def: Uma ação $\varphi : G \times X \to X$ é **propriamente descontínua** se $\forall x \in X$, $\exists U \subset X$ viz. aberta de x tal que $gU \cap U = \emptyset$ $\forall g \in G, g \neq e$. $\quad (gU = \{gx' \mid x' \in U\})$



OBS: Se $\varphi: G\times X \to X$ é uma ação proprienente descontínua então, em particular, a ação é livre $(G_x = \{e\}\ \forall x \in X)$

Prop: Suponha que $\varphi: G\times E \to E$ é uma ação propriamente descontínua. Então $q: E \to X = E/G$ é um recobrimento.

Dem: Vamos mostrar que $\forall x = [e] \in X$, $\exists\ U \subset X$ viz. aberta tal que $q^{-1}(U) = \coprod_{g\in G} V_g$, $q|_{V_g}: V_g \to U$ é homeo $(\Lambda = G)$

- Dado $x \in X$, seja $e \in E$ t.q. $[e] = x$
- Seja $V \subset E$ viz. de e tal que

  $gV \cap V = \phi\ \ \forall g \neq 1$

(OBS: Vou denotar o elemento neutro de G por 1 para não confundir com $e \in E$)

Note que: $U = q(V) \subset X$ é aberto na topologia quociente pois

$q^{-1}(q(V)) = \bigcup_{g\in G} gV$ e cada $gV = \varphi_g(V)$ é aberto pois $\varphi_g: X \to X$ é homeo.

Denote $g\cdot V = V_g$. $\Rightarrow q^{-1}(U) = \coprod_{g\in G} V_g$

além disso, $q|_{V_g} = \varphi_g \circ q|_V$. Logo, para mostrar que

$q|_{V_g}: V_g \to U$ é homeo, basta mostrar que $q|_V: V \to U$

é homeo:

- $q|_V$ é claramente contínua e sobrejetora
- $q|_V$ é injetora: Suponha $q(y) = q(y')$, $y, y' \in V$

$\Rightarrow [y] = [y'] \Rightarrow \exists g \in G$ t.q. $y' = gy \Rightarrow y' \in gV \cap V \Rightarrow g = 1, y' = y$
$\Rightarrow q|_V$ é injetora

Logo, $q|_V : V \to U$ é bijeção contínua. Seja $\sigma : U \to V$ a inversa de $q|_V$. Temos que mostrar que σ é contínua

Seja $W \subset V$ aberto. $\Rightarrow$ $q^{-1}(\sigma^{-1}(W)) = \bigcup_{g \in G} gW \Rightarrow \sigma^{-1}(W)$ é aberto em $X \Rightarrow \sigma^{-1}(W)$ é aberto em U. ∎

__Teorema__: Suponha que E é 1-conexo e que $\Psi : E \times G \to E$ é uma ação propriamente descontínua (à direita). Então

Então $\pi_1(X, x) \cong G$.

__Dem__: Sabemos que

$$\begin{aligned} \Phi_e : \pi_1(X,x) &\longrightarrow q^{-1}(x) \\ [\gamma] &\longmapsto \tilde{\gamma}_e(1) \end{aligned} \qquad \text{é uma bijeção.} \quad (e \in q^{-1}(x))$$

Por outro lado, $\Psi : E \times G \to E$ induz uma bijeção

$$\begin{aligned} \Psi_e : G &\longrightarrow q^{-1}(x) \qquad (q(e) = x) \\ g &\longmapsto e \cdot g \end{aligned}$$

De fato, $q^{-1}(x) = \mathcal{O}_e$ e portanto Ψ_e é sobrejetor.

Vamos ver que Ψ_e é injetor: Se $\Psi_e(g) = \Psi_e(h) \Rightarrow$
$\Rightarrow e \cdot g = e \cdot h \Rightarrow e \cdot gh^{-1} = e \Rightarrow gh^{-1} \in G_e = \{1\} \Rightarrow gh^{-1} = 1 \Rightarrow h = g$.

Seja $\varphi_e : \pi_1(X, x) \longrightarrow G$

$$\varphi_e([\gamma]) = \Psi_e^{-1} \circ \Phi_e([\gamma])$$

ou seja $\varphi_e([\gamma]) = g$ onde $g \in G$ é o único elemento tal que

$$\tilde{\gamma}_e(1) = e \cdot g$$

Vamos mostrar que φ_e é homomorfismo:

Temos que mostrar que se $\tilde{\alpha}_e(1) = eh$, $\tilde{\beta}_e(1) = eg$

$\Rightarrow \widetilde{\beta * \alpha}_e(1) = e\cdot(gh)$

Note que $\widetilde{\beta*\alpha}_e(1) = \tilde{\beta}_{eh} * \tilde{\alpha}_e(1) = \tilde{\beta}_{eh}(1)$

mas $\tilde{\beta}_{eh}(s) = \tilde{\beta}_e(s)\cdot h$ (por unicidade de levantamento)

$\Rightarrow \tilde{\beta}_{eh}(1) = (eg)h = e(gh)$

$\Rightarrow \varphi_e([\beta][\alpha]) = \varphi_e([\beta])\varphi_e([\alpha]) \Rightarrow \varphi_e$ é iso $\blacksquare$

OBS: Sobre ações à esquerda e à direita

O fato de ter enunciado o teorema usando ações à direita NÃO é importante. Isso foi feito assim somente para que φ_e seja um homomorfismo e não um anti-homomorfismo.

- Se $\psi : G\times E \to E$ é ação à esquerda então $\hat{\psi} : E\times G \longrightarrow E$, $\hat{\psi}(e,g) = \psi(g^{-1}, e) = g^{-1}e$ é ação à direita.

(Ambas as ações tem as mesmas órbitas!)

- Além disso, ψ é propriamente descontínua $\Leftrightarrow$ $\hat{\psi}$ é propriamente descontínua.

Logo, Se $\psi : G\times E \to E$ é ação prop. descontínua à esquerda e E é 1-conexo $\Rightarrow \pi_1(E/G, [e]) \cong G$

Exemplos:

1) $\mathbb{Z}^n \circlearrowright \mathbb{R}^n$ ($G \circlearrowright X$ lê: G age em X)

$(k_1,\dots,k_n)\cdot(x_1,\dots,x_n) = (x_1+k_1,\dots,x_n+k_n)$ ação prop. descontínua

(Viz. de $(x_1,\dots,x_n)$ t.q. $(k_1,\dots,k_n)\cdot U \cap U = \phi$ $\forall (k_1,\dots,k_n) \neq (0,\dots,0)$:

$U = \left(x_1-\frac{1}{1000}, x_1+\frac{1}{1000}\right)\times \dots \times\left(x_n-\frac{1}{1000}, x_n+\frac{1}{1000}\right)$)

$$\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n \cong T^n = \underbrace{S^1\times\dots\times S^1}_{n\text{-vezes}}$$

$\Rightarrow \pi_1(T^n, p) = \mathbb{Z}^n$

2) $\mathbb{Z}_2 \circlearrowright S^n$, $\quad (-1)\cdot p = -p$, $\; 1\cdot p = p$, $\quad S^n/\mathbb{Z}_2 = \mathbb{R}P^n$

$\pi_1(\mathbb{R}P^n, p) = \mathbb{Z}_2$

3) $\mathbb{Z}_n \circlearrowright S^3$:

$\mathbb{Z}_n = \{z \in S^1 \mid z^n = 1\}$, $\quad S^3 = \{(w_1,w_2)\in \mathbb{C}^2 \mid |w_1|^2+|w_2|^2 = 1\}$

$\varphi: \mathbb{Z}_n \times S^3 \to S^3$, $\quad \varphi(z,(w_1,w_2)) = (zw_1, zw_2)$

Ação prop. descontínua $\Rightarrow$ $\pi_1(L_n, p) = \mathbb{Z}_n$, $\quad L_n = S^3/\mathbb{Z}_n$

Exercício: • Mostre que se G é grupo finito, $\varphi: G\times X \to X$ ação, e X espaço métrico, então

$G \circlearrowright X$ é livre $\Leftrightarrow$ $G \circlearrowright X$ é propriamente descontínua

• Conclua que $\mathbb{Z}_n \circlearrowright S^3$ é propriamente descontínua

• Mostre que se G é grupo abeliano finitamente gerado $\Rightarrow \exists X$ t.q. $\pi_1(X,x) = G$.

Pergunta: Será que todo recobrimento 1-conexo aparece dessa forma?

- Seja $p: E \to X$ um recobrimento onde E é 1-conexo
- Seja $x_0 \in X$.
- Vamos mostrar que $\pi_1(X, x_0) \curvearrowright E$ por uma ação propriamente descontínua tal que $E/\pi_1(X,x_0) \cong X$

- Seja $e_0 \in p^{-1}(x_0)$
- Dado $e \in E$, seja $\gamma^e : I \to E$, $\gamma^e(0) = e_0$, $\gamma^e(1) = e$

Dado $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$, definimos

$$e \cdot [\alpha] = (\widetilde{(p\circ\gamma^e) * \alpha})_{e_0}(1) = \widetilde{p\circ\gamma^e}_{\tilde{\alpha}_{e_0}(1)} * \tilde{\alpha}_{e_0}(1) = \widetilde{p\circ\gamma^e}_{\tilde{\alpha}_{e_0}(1)}(1)$$

1. Bem definido:

$\alpha \sim \beta$ rel $\partial I \Rightarrow \tilde{\alpha}_{e_0} \sim \tilde{\beta}_{e_0}$ rel $\partial I \Rightarrow \tilde{\alpha}_{e_0}(1) = \tilde{\beta}_{e_0}(1)$

$\Rightarrow \widetilde{p\circ\gamma^e}_{\tilde{\alpha}_{e_0}(1)} = \widetilde{p\circ\gamma^e}_{\tilde{\beta}_{e_0}(1)} \Rightarrow e\cdot[\alpha] = e\cdot[\beta]$

2. $e\cdot[\alpha]$ NÃO depende de γ^e pois se $\eta^e : I \to E$ é tal que $\eta^e(0) = e_0$, $\eta^e(1) = e$ $\underset{E \text{ 1-conexo}}{\Rightarrow}$ $\eta^e \sim \gamma^e$ rel ∂I

$\Rightarrow p\circ\eta^e \sim p\circ\gamma^e$ rel $\partial I \Rightarrow \widetilde{p\circ\gamma^e}_{\tilde{\alpha}_{e_0}(1)}(1) = \widetilde{p\circ\eta^e}_{\tilde{\alpha}_{e_0}(1)}$

3. $\varphi : E \times \pi_1(X,x_0) \to E$, $\varphi(e, [\alpha]) = e\cdot[\alpha]$ é ação

De fato,

(i) $\left(e\cdot[\alpha]\right)\cdot[\beta] = \Big(\overbrace{\big(\widetilde{p\circ\gamma^e * \tilde{\alpha}}\big)_{e_0}(1)}^{f}\Big)\cdot[\beta]$

Note que $\gamma^f(s) = \left(\widetilde{p\circ\gamma^e * \tilde{\alpha}}\right)_{e_0}(s)$ é uma curva que começa em e_0 e acaba em f

$$p\circ\gamma^f = (p\circ\gamma^e)*\alpha$$

$$\Rightarrow \left(e\cdot[\alpha]\right)\cdot[\beta] = f\cdot[\beta] = \left(\widetilde{p\circ\gamma^f * \tilde{\beta}}\right)_{e_0}(1) =$$

$$= \left(\left(\widetilde{(p\circ\gamma^e)*\alpha}\right)_{\tilde{\beta}_{e_0}(1)} * \tilde{\beta}_{e_0}\right)(1) = \widetilde{p\circ\gamma^e}_{(\widetilde{\alpha*\beta})_{e_0}(1)} * \widetilde{\alpha*\beta}_{e_0}(1) = e\left([\alpha][\beta]\right)$$

(ii) $e\cdot[c_{x_0}] = \widetilde{p\circ\gamma^e}_{e_0}(1) = \gamma^e(1) = e.$

(4) A ação é propriamente descontínua:

Seja $p(e)=x$, $U\subset X$ um aberto uniformemente recoberto de x.

Note que $p(e\cdot[\alpha]) = p\left(\widetilde{p\circ\gamma^e}_{\tilde{\alpha}_{e_0}(1)}(1)\right) = (p\circ\gamma^e)(1) = p(\gamma^e(1))$
$= p(e) = x$

ou seja $e\cdot[\alpha]\in p^{-1}(x)$

$$p^{-1}(U) = \coprod_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda, \quad p|_{V_\lambda}: V_\lambda \to U \text{ homeo}$$

Seja $V_{\lambda_0}\subset E$ a placa que contém e

Se $f\in V_{\lambda_0}\cdot[\alpha]\cap V_{\lambda_0} \Rightarrow \left(\widetilde{p\circ\gamma^f}_{\tilde{\alpha}_{e_0}(1)} * \tilde{\alpha}_{e_0}\right)(1) = f$

$\Rightarrow \left(\widetilde{p\circ\gamma^f}_{\tilde{\alpha}_{e_0}(1)} * \tilde{\alpha}_{e_0}\right)(0) = \left(\widetilde{p\circ\gamma^f}_{\tilde{\alpha}_{e_0}(1)} * c_{e_0}\right)(0)$ e

$$\left(\widetilde{p\circ\gamma}^{f}_{\tilde{\alpha}_{e_0}(1)} * \tilde{\alpha}_{e_0}\right)(1) = \left(\widetilde{p\circ\gamma}^{f}_{\tilde{\alpha}_{e_0}(1)} * c_{e_0}\right)(1)$$

$\Rightarrow \left(\widetilde{p\circ\gamma}^{f}_{\tilde{\alpha}_{e_0}(1)} * \tilde{\alpha}_{e_0}\right) \sim \widetilde{p\circ\gamma}^{f}_{\tilde{\alpha}_{e_0}(1)} * c_{e_0}$ rel ∂I (pois E é 1-conexo)

$\Rightarrow \tilde{\alpha}_{e_0} \sim c_{e_0}$ rel $\partial I \Rightarrow \alpha \sim c_{x_0}$ rel $\partial I \Rightarrow [\alpha] = [c_{x_0}]$ //

(5) $\mathcal{O}_e = \{ e\cdot[\alpha] \mid [\alpha] \in \pi_1(X,x_0)\} = p^{-1}(x)$ onde $x = p(e)$

Já sabemos que $\mathcal{O}_e \subset p^{-1}(x)$. Vamos mostrar que se $f \in p^{-1}(e) \Rightarrow \exists\, [\alpha] \in \pi_1(X,x_0)$ t.q. $e\cdot[\alpha] = f$

Seja $f_0 \in p^{-1}(x_0)$ $(x_0 = p(e_0))$, $f_0 = \left(\widetilde{p\circ\gamma}^{e}\right)_f(1)$

Seja $\eta : I \to E$, $\eta(0) = e_0$, $\eta(1) = f_0$ e seja $[\alpha] = [p\circ\eta]$

$\Rightarrow e\cdot[\alpha] = \widetilde{p\circ\gamma}^{e}_{\tilde{\alpha}_{e_0}(1)}(1) = \widetilde{p\circ\gamma}^{e}_{f_0}(1) = \overline{\widetilde{p\circ\gamma}^{e}_{f}}(0) = f$.

Segue que $X \cong E/\sim \;\cong E/\pi_1(X,x_0)$ onde $e\sim f \Leftrightarrow p(e) = p(f)$

■