Aula 10

• $\pi_1(S^1,1)$:

• Seja $p: \mathbb{R} \to S^1$, $t \mapsto e^{2\pi i t}$ recobrimento de S^1

<u>Def</u>: Dado $[\gamma] \in \pi_1(S^1,1)$, definimos

$$\deg([\gamma]) = \tilde{\gamma}_0(1)$$

onde $\tilde{\gamma}: I \to \mathbb{R}$, $p \circ \tilde{\gamma} = \gamma$, $\tilde{\gamma}(0) = 0$

<u>OBS</u>: Note que $\deg([\gamma]) \in p^{-1}(1) = \mathbb{Z}$

<u>OBJETIVO</u>: Vamos mostrar que $\deg: \pi_1(S^1,1) \to \mathbb{Z}$ é um isomorfismo de grupos

• <u>deg é homomorfismo</u>:

Sejam $[\alpha],[\beta] \in \pi_1(S^1,1)$, $\deg([\alpha]) = n$, $\deg([\beta]) = m$

$\deg([\alpha][\beta]) = \deg([\alpha * \beta])$

Note que $\widetilde{\alpha*\beta}_0(s) = \tilde{\alpha}_{\tilde{\beta}_0(1)} * \tilde{\beta}_0(s) = \begin{cases} \tilde{\beta}_0(2s) & 0 \leq s \leq 1/2 \\ \tilde{\alpha}_{\tilde{\beta}_0(1)}(2s-1) & 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases}$

Logo, $\deg([\alpha][\beta]) = \tilde{\alpha}_{\tilde{\beta}_0(1)}(1)$ $\quad (\tilde{\beta}_0(1) = m)$

Mas $\tilde{\alpha}_m(s) = m + \tilde{\alpha}_0(s)$ pois $m + \tilde{\alpha}_0(0) = m + 0 = m$, e

$p(m+\tilde{\alpha}_0(s)) = e^{2\pi i (m+\tilde{\alpha}_0(s))} = e^{2\pi i m} \cdot e^{2\pi i \tilde{\alpha}_0(s)} = 1 \cdot p(\tilde{\alpha}_0(s)) = \alpha(s)$

$\Rightarrow \deg([\alpha][\beta]) = m + \tilde{\alpha}_0(1) = m + n = \deg([\alpha]) + \deg([\beta])$ $\blacksquare$

- **deg é injetor:**

Pelo levantamento de homotopia (um dos corolários da aula 9)

$$[\alpha] = [\beta] \underset{\substack{\mathbb{R} \text{ é contrátil} \\ \Rightarrow 1\text{-conexo}}}{\iff} \tilde{\alpha}_0(1) = \tilde{\beta}_0(1) \underset{\text{def}}{\iff} \deg[\alpha] = \deg[\beta]$$

- **deg é sobrejetor:** dado $n \in \mathbb{Z}$, seja $\omega_n(s) = e^{2\pi i n s}$.

$\Rightarrow \tilde{\omega}_0(s) = ns \Rightarrow \deg[\omega_n] = n$ ∎

OBS: O nome deg vem do fato que $f_n : S^1 \to S^1$, $z \mapsto z^n$

$\Rightarrow \deg(f_n) = n$ (onde estamos pensando em f_n como um laço em S^1).

Conclusão: $\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$

$$[\alpha] \longmapsto \deg([\alpha])$$

Aplicação:

Teorema Fundamental da Álgebra

Seja $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$.
Se $n \geq 1$ ($a_n \neq 0$), $\exists\, z_0 \in \mathbb{C}$ t.q. $p(z_0) = 0$

Dem: Podemos assumir que $a_0 = 1$ (se não divide por a_0)

Assuma que $p(z) \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$

Consider $\quad f_r : S^1 \longrightarrow S^1$

$$f_r(z) = \frac{p(rz)/p(r)}{\| p(rz)/p(r) \|}$$

Note que $\cdot\; f_0(z) = 1 \quad \forall z$

$\cdot\; f_r(1) = 1 \quad \forall r$

$\cdot\; f_r \sim f_0 \text{ rel } \{1\} \quad \forall r$

(Homotopia $\quad H(z,t) = f_{tr}(z)$)

Logo, pensando em f_r como um laço em S^1, temos

$$\deg [f_r] = \deg [f_0] = 0$$

Vamos mostrar agora que $\deg [f_r] = n$

Se $\quad R > 1, \quad R > |a_0| + \cdots + |a_{n-1}|$. Para $|z| = R$ temos

$$|z|^n = R^n = R^{n-1} \cdot R \;>\; |z|^{n-1} (|a_{n-1}| + \cdots + |a_0|) \geq |a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + \cdots + a_0|$$

Logo, para $|z| = R$, $\quad P_t(z) = z^n + t(a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0)$ NÃO tem raíz.

Considere a homotopia $\quad H : S^1 \times I \longrightarrow S^1$

$$H(z,t) = \left(P_t(Rz)/P_t(R) \right) / \| P_t(Rz)/P_t(R) \|$$

$$H(z,0) = \frac{(Rz)^n / R^n}{\| (Rz)^n / R^n \|} = \frac{z^n}{\| z \|^n} = z^n, \quad H(z,1) = f_R(z), \quad H(1,t) = 1 \quad \forall t$$

Logo, $f_R \sim \omega_n$ $\quad (\omega_n(z) = z^n)$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \deg([f_R]) = n \\ \qquad\quad \parallel \\ \quad\ \deg([f_0]) = 0 \end{array}\right\}$$ ou seja, se $p(z)$ Não tem raíz $\Rightarrow$ $n=0$ e $p(z) = a_0$ constante ∎

Existência e Unicidade de Levantamentos

$p: E \to B$ recobrimento, $f: X \to B$

Def: Um levantamento de f é uma função $\tilde{f}: X \to E$ tal que

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[ur, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd} \qquad (p \circ \tilde{f} = f)$$

Prop: (Unicidade de Levantamento)

Suponha que X é conexo, e $\tilde{f}, \tilde{\tilde{f}}$ são dois levantamentos de $f: X \to B$. Se $\tilde{f}(x_0) = \tilde{\tilde{f}}(x_0)$ para algum $x_0 \in X \Rightarrow \tilde{f}(x) = \tilde{\tilde{f}}(x)$ $\forall x \in X$.

Dem: Seja $A \subset X$, $A = \{x \in X \mid \tilde{f}(x) = \tilde{\tilde{f}}(x)\}$.

- $A \neq \emptyset$ pois $x_0 \in A$

Vamos mostrar que A é aberto e fechado:

A é aberto:

Suponha que $x \in A$, seja $U \subset B$ vizinhança de $f(x)$ tal que $p^{-1}(U) = \coprod_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$, $p|_{V_\lambda} : V_\lambda \to U$ homeo

se $\tilde{f}(x) = \tilde{\tilde{f}}(x) \in V_\lambda \Rightarrow \tilde{f}|_{f^{-1}(U)} = \tilde{\tilde{f}}|_{f^{-1}(U)} = p|_{V_\lambda}^{-1} \circ f|_{f^{-1}(U)}$

$\Rightarrow f^{-1}(U) \subset A$ é viz. aberta de $x \Rightarrow A$ é aberto

A é fechado:

Suponha que $x \in X - A$

$\Rightarrow$ localmente $\tilde{f} = p|_{V_\lambda}^{-1} \circ f$, $\tilde{\tilde{f}} = p|_{V_\mu}^{-1} \circ f$ $\lambda \neq \mu$

$\Rightarrow f^{-1}(U) \subset A$ é viz. aberta de x em $X - A$

$\Rightarrow X - A$ é aberto $\Rightarrow A$ é fechado.

Logo, $A = X$ e $\tilde{f}(x) = \tilde{\tilde{f}}(x)$ $\forall x \in X$ ∎

Teorema (Existência de Levantamento)

Seja $p : E \to B$ recobrimento e X conexo por caminhos e localmente conexo por caminhos.

Se $f : X \to B$ é contínua, $x_0 \in X$, $e_0 \in p^{-1}(f(x_0))$, então existe levantamento $\tilde{f} : X \to E$ tal que $\tilde{f}(x_0) = e_0$

se e somente se $f_*(\pi_1(X,x_0)) \subset p_*(\pi_1(E,e_0))$. 6

Dem: $(\Rightarrow)$ Se
$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[ur, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$
e $\tilde{f}(x_0) = e_0$

$$\Rightarrow p_*\left(\tilde{f}_*(\pi_1(X,x_0))\right) = f_*(\pi_1(X,x_0))$$

$$\Rightarrow f_*(\pi_1(X,x_0)) \subset p_*(\pi_1(E,e_0))$$

$\left(\begin{array}{l}\text{Se } [\alpha] \in f_*(\pi_1(X,x_0)) \\ \Rightarrow [\alpha] = f_*[\gamma] = \underbrace{p_*(\tilde{f}_*[\gamma])}_{\in p_*(\pi_1(E,e_0))}\end{array}\right)$

$(\Leftarrow)$ Suponha que $f_*(\pi_1(X,x_0)) \subset p_*(\pi_1(E,e_0))$

Dado $x \in X$, se $\gamma^x : I \to X$ tal que $\gamma^x(0) = x_0$, $\gamma^x(1) = x$

Defina, $\boxed{\tilde{f}(x) = \widetilde{f \circ \gamma^x_{e_0}}(1)}$

(i) $\tilde{f}(x)$ NÃO depende da escolha de γ^x:

Se $\alpha : I \to X$, $\alpha(0) = x_0$, $\alpha(1) = x$

$\Rightarrow \bar{\alpha} * \gamma^x : I \to X$ é um laço em x_0

$$\Rightarrow f_*([\bar{\alpha} * \gamma^x]) \in f_*(\pi_1(X,x_0)) \subset p_*(\pi_1(E,e_0))$$

Logo, existe um laço $\beta : I \to E$, $\beta(0) = e_0 = \beta(1)$
tal que $p \circ \beta \sim f \circ (\bar{\alpha} \circ \gamma^x)$ rel ∂I

Segue que $\beta \sim \widetilde{f\circ(\bar{\alpha} * \gamma^x)}_{e_0}$ rel ∂I

Mas $\widetilde{f\circ(\bar{\alpha} * \gamma^x)}_{e_0} = (\widetilde{f\circ\bar{\alpha}})_{\widetilde{f\circ\gamma^x_{e_0}}(1)} * \widetilde{f\circ\gamma^x}_{e_0}$

$\Rightarrow (\widetilde{\widetilde{f\circ\bar{\alpha}}})_{\widetilde{f\circ\gamma^x_{e_0}}(1)} * \beta \sim \widetilde{f\circ\gamma^x}_{e_0}$ rel ∂I ⊛

Mas $\widetilde{\widetilde{f\circ\bar{\alpha}}}_{\widetilde{f\circ\gamma^x_{e_0}}(1)} = (\widetilde{f\circ\alpha})_{e_0}$.

⊛ implica em particular que $\widetilde{f\circ\alpha}_{e_0}(1) = \widetilde{f\circ\gamma^x_{e_0}}(1) = \tilde{f}(x)$ //

(ii) <u>$\tilde{f}$ é um levantamento de f</u>:

$p\circ\tilde{f}(x) = p\left(\widetilde{f\circ\gamma^x_{e_0}}(1)\right) = f\circ\gamma^x(1) = f(x)$ //

(iii) <u>$\tilde{f}(x_0) = e_0$</u>: $\tilde{f}$ NÃO depende de γ^x. Seja $\gamma^{x_0}(s) = x_0\ \forall s$

$\Rightarrow \tilde{f}(x_0) = (\widetilde{f\circ C_{x_0}})_{e_0} = e_0$

<u>Exercício</u>: Mostre que $\tilde{f}$ é contínua

OBS: É aqui que entra a hipótese que X é localmente conexo p/ caminhos

"Se x está perto de y, podemos escolher γ^x perto de γ^y e portanto $\tilde{f}(x)$ está perto de $\tilde{f}(y)$". ∎

Teorema (Borsuk–Ulam)

Seja $f: S^n \to \mathbb{R}^2$, $n \geq 2$ uma função ímpar ($f(-x) = -f(x)$). Então existe $x_0 \in S^n$ tal que $f(x_0) = 0$

OBS: A mesma afirmação trocando $\mathbb{R}^2$ por $\mathbb{R}$ é óbvia (consequencia do teorema do valor intermediário)

Corolário: Seja $g: S^n \to \mathbb{R}^2$. Então existe $x_0 \in S^n$ tal que $g(x_0) = g(-x_0)$.

Dem: Considere $f: S^n \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = g(x) - g(-x)$.

$\Rightarrow f(-x) = g(-x) - g(x) = -f(x)$

$\Rightarrow f$ é ímpar $\Rightarrow \exists\, x_0 \in S^n$ t.q. $f(x_0) = 0$

$\Rightarrow g(x_0) = g(-x_0)$ ∎

Dem do Teorema:

Seja $f: S^n \to \mathbb{R}^2$ ímpar. Suponha que $f(x) \neq 0$ $\forall x \in S^n$. Considere

$$F: S^n \longrightarrow S^1$$
$$x \longmapsto \frac{f(x)}{\|f(x)\|}$$

Note que $F(x) = -F(-x)$

Logo F induz uma função

$$\bar{F} : \mathbb{R}P^n \longrightarrow \mathbb{R}P^1$$
$$\bar{F}[x] = [F(x)]$$

Ou seja

$$\begin{tikzcd}
S^n \arrow[r, "F"] \arrow[d, "p"'] & S^1 \arrow[d, "p"] \\
\mathbb{R}P^n \arrow[r, "\bar{F}"'] \arrow[ur, dashed, "\tilde{F}"] & \mathbb{R}P^1
\end{tikzcd}$$

Note que $\mathbb{R}P^1 \cong S^1$. Logo, $\bar{F}$ admite um levantamento $\tilde{F} : \mathbb{R}P^n \longrightarrow S^1$ pois $\pi_1(\mathbb{R}P^n, [x]) = \mathbb{Z}_2$, $\pi_1(S^1, 1) = \{1\}$ e o único homomorfismo de $\mathbb{Z}_2$ em $\mathbb{Z}$ é o homomorfismo trivial.

Temos então dois levantamento da aplicação $\bar{F} \circ p$:

$$\begin{tikzcd}
 & S^1 \arrow[d] \\
S^n \arrow[ur, bend left, "\tilde{F} \circ p"] \arrow[ur, "F"'] \arrow[r, "\bar{F} \circ p"'] & \mathbb{R}P^1 \cong S^1
\end{tikzcd}$$

Note que existe $x \in S^n$ tal que $\tilde{F} \circ p(x) = F(x)$

De fato,

$$[\tilde{F}\circ p(x)] = \bar{F}([x]) = [F(x)]$$

Se $\tilde{F}\circ p(x) \neq F(x) \Rightarrow \tilde{F}\circ p(x) = -F(x) = F(-x)$

$\Rightarrow \quad \tilde{F}\circ p(-x) = \tilde{F}\circ p(x) = F(-x)$

(ou seja, se $\tilde{F}\circ p(x) \neq F(x) \Rightarrow \tilde{F}\circ p(-x) = F(-x)$)

Por unicidade, $\tilde{F}\circ p = F$

Mas $\tilde{F}\circ p$ é par e F é ímpar

$\Rightarrow \quad F \equiv 0 \qquad$ Absurdo!

$\Rightarrow \exists\, x_0 \in S^n$ tal que $f(x_0) = 0$ $\blacksquare$