Sejam X, Y espaços topológicos.

<u>Pergunta Central da Topologia:</u> X e Y são homeomorfos?

ou seja, existe $f: X \to Y$ bijeção contínua com inversa $f^{-1}: Y \to X$ contínua?

- Para provar que dois espaços são homeomorfos temos que exibir um homeomorfismo entre X e Y

 - Pode ser bastante trabalhoso, pode ser difícil, mas em geral é possível

<u>Exercício:</u> Encontre um homeomorfismo explícito entre

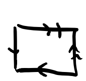
$$X = (I \times I) - I \times \{0\} \qquad (I = [0,1])$$

$$Y = D^2 - \{(x,y) \in D^2 \mid y \geq 0,\ x^2+y^2=1\} \qquad (D^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\})$$

X $\qquad\qquad$ Y

<u>Exercício:</u> Encontre homeomorfismos explícitos entre

1) $S^2 \cong (I \times I)/\sim$ $\quad (0,t) \sim (t,0)$, $(1,t) \sim (t,1)$



2) $S^1 \times S^1 \cong (I \times I)/\sim$ $\quad (0,t) \sim (1,t)$, $(t,0) \sim (t,1)$

3) Seja $\mathbb{R}P^2 = \{ l \subset \mathbb{R}^3 \mid l \text{ reta pela origem} \}$. $\mathbb{R}P^2$ é um espaço topológico com a seguinte topologia:

$$\mathbb{R}P^2 = (\mathbb{R}^3 - \{0\})/\sim \quad \text{onde } v \sim \lambda v, \quad \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Motre que

$$\mathbb{R}P^2 \cong S^2/\sim \quad p \sim -p, \qquad \mathbb{R}P^2 \cong D^2/\sim \quad p \in \partial D^2 = S^1 = \{(x,y) \mid x^2+y^2=1\}$$

$p \sim -p$

$(p \sim p \text{ se } p \in Int(D^2))$

$$\mathbb{R}P^2 \cong I \times I/\sim \quad (0,t) \sim (1, 1-t)$$
$$(t,0) \sim (1-t, 1)$$

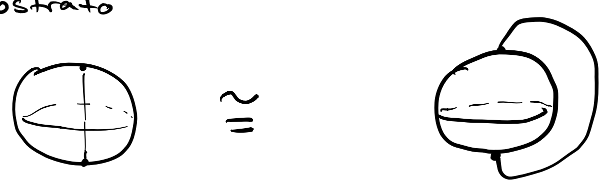
4) $S^2 \cong D^2/\partial D^2$, $S^n \cong D^n/\partial D^n$, $S^n \cong (S^{n-1} \times [-1,1])/\sim$

$(p,-1) \sim (q,-1)$
$(p,1) \sim (q,1)$ $\forall p,q \in S^{n-1}$

Algumas técnicas/resultados ajudam na hora de mostrar que dois espaços são homeomorfos:

<u>Técnica</u>: Comparar os espaços com um terceiro "espaço abstrato"

<u>exemplo</u>:



Espaço abstrato: $(S^2 \sqcup I)/\sim \quad N \sim 0, \ S \sim 1$

<u>Teorema</u>: Se X é compacto e Y é Hausdorff então uma bijeção contínua $f: X \to Y$ é um homeomorfismo

<u>Dem</u>: Exercício!

Problema: Como mostrar que dois espaços **NÃO** são homeomorfos?

Solução: Encontrar / Construir invariantes topológicos

Exemplos: Hausdorff / Compacto / Segundo Contável / .....

Hausdorff: $\forall x, y \in X$, $\exists \underset{x \in}{U}, \underset{y \in}{V}$ abertos t.q. $U \cap V = \phi$

Compacto: se $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ é cobertura por abertos de X

$\Rightarrow \exists\ \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \Lambda$ tal que $X = \bigcup_{i=1}^{k} U_{\alpha_i}$

2º Contável: Base enumerável de abertos

Exemplo: $(0,1) \not\cong S^1$

NÃO Compacto — compacto

Invariante Topológico que vamos generalizar: # de componentes conexas

TRUQUE: Remover um ponto:

Prop: Se $f: X \to Y$ é um homeo e $x_0 \in X$ então

$$f: X - \{x_0\} \longrightarrow Y - \{f(x_0)\} \text{ é homeo}$$

TRUQUE: Se $X \cong Y$ e $x_0 \in X \Rightarrow \exists\ y_0 \in Y$ tal que $X - x_0 \cong Y - y_0$

Exemplo: $S^1 \ncong I$

$I - \{1/2\}$ tem 2 comp. conexas.

$\forall p \in S^1$, $S^1 - \{p\}$ tem 1 componente conexa

Exemplo: $\mathbb{R} \ncong \mathbb{R}^2$

- O TRUQUE NÃO funciona p/ mostrar que $\mathbb{R}^2 \ncong \mathbb{R}^3$!

Construção de Invariantes usando Teoria de Categorias

Def: Uma categoria $\mathcal{C}$ é formada por um coleção de objetos $Obj(\mathcal{C})$ e para cada par $(A,B) \in Obj(\mathcal{C})$ uma coleção de morfismos $Mor(A,B)$ e uma operação de composição

$$Mor(A,B) \times Mor(B,C) \xrightarrow{\circ} Mor(A,C)$$
$$(f, g) \longmapsto g \circ f$$

Tal que:

① $\forall A \in Obj(\mathcal{C})$ existe um morfismo $1_A \in Mor(A,A)$ tal que $1_A \circ f = f$, $g \circ 1_A = g$

$$\forall f \in Mor(X,A), \ \forall g \in Mor(A,B)$$

② $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$

Exemplos: TOP, SET, Op(X), Top*, GRP, VEC

Def: Um funtor $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ é uma função

$$F: Obj(\mathcal{C}) \longrightarrow Obj(\mathcal{D}), \quad \text{uma função}$$

$$F: Mor(A,B) \longrightarrow Mor(F(A), F(B)) \qquad (\forall A, B \in Obj(\mathcal{C}))$$

tal que

1. $F(1_A) = 1_{F(A)} \quad \forall A \in \mathcal{C}$
2. $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$

OBS: se $f \in Mor(A,B)$ é um isomorfismo $\left(\exists f^{-1} \in Mor(B,A) \quad \begin{array}{l} f \circ f^{-1} = 1_B \\ f^{-1} \circ f = 1_A \end{array} \right)$

$\Rightarrow F(f)$ é um isomorfismo em $\mathcal{D}$

Pois
- $F(f) \circ F(f^{-1}) = F(f \circ f^{-1}) = F(1_B) = 1_{F(B)}$
- $F(f^{-1}) \circ F(f) = F(f^{-1} \circ f) = F(1_A) \in 1_{F(A)}$

Conclusão: Podemos usar funtores p/ construir invariantes de espaços topológicos!

Exemplo:

1. $\pi_0 : Top \longrightarrow Set$

$$X \longmapsto \{\text{comp. conexas de } X\}$$
$$f \longmapsto \pi_0(f)$$

② $\Omega : Top^* \longrightarrow Top^*$

$$(X, x_0) \longmapsto \Omega(X, x_0) = \{\gamma : I \to X \mid \gamma(0) = \gamma(1) = x_0\}$$

$$f : (X, x_0) \to (Y, y_0) \longmapsto F(f)(\gamma) = f \circ \gamma \in \Omega(Y, y_0)$$

③ $\pi_1 : Top^* \longrightarrow Set^*$ $\quad \pi_1 = \pi_0 \circ \Omega$

OBS: Na verdade, $\pi_0(\Omega(X, x_0))$ tem estrutura de grupo e $\pi_1 : Top^* \longrightarrow GRP$

4) $\pi_K = \pi_0 \circ \underbrace{\Omega \circ \Omega \circ \cdots \circ \Omega}_{K\text{-vezes}}$

Exemplo: $\mathbb{R}^2 \not\cong \mathbb{R}^3$

$\pi_1(\mathbb{R}^3 - \{p\}) = \{*\}$ (um elemento)

$\pi_1(\mathbb{R}^2 - \{p\})$ tem pelo menos 2 elementos

(Na verdade tem infinitos)

Estrutura do Curso:

① Revisão de Topologia Quociente

② Complexos CW

③ Homotopia / Equivalência de Homotopia

④ Definição de $\pi_1(X, x_0)$ e prop. básicas ⑦

⑤ Recobrimentos e $\pi_1(S^1, p)$

⑥ Teorema de Seifert-van Kampen e $\pi_1(K, p)$ (K cplx CW)

⑦ (se der tempo) Elementos básicos de Homologia

Avaliação:

- Trabalho
- Uma Prova em Aula
- Uma Prova em Casa + Uma lista (?)
- Seminário (?)