# 1 Um Pouco de Topologia e Variedades Topológicas

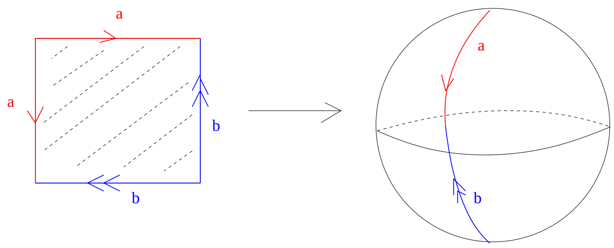
1. Uma **variedade topológica de dimensão** $n$ é um espaço topológico $M$ segundo contável e Hausdorff que é *localmente euclideano de dimensão* $n$, ou seja, tal que para cada $x \in M$, existe uma vizinhança $U \subset M$ de $x$ e um homeomorfismo

$$\varphi : U \longrightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n.$$

Seja $\mathbb{S}^2$ a esfera bidimensional que é definida como o espaço quociente obtido identificando as fronteiras de um quadrado conforme a figura 1. Ou seja, se denotarmos o intervalo $[0,1]$ por $I$, então

$$\mathbb{S}^2 = \{(x,y) \in I \times I\}/\sim$$

onde identificamos $(0,y) \sim (1-y,1)$, e $(x,0) \sim (1,1-x)$.




The sphere obtained from a square glueing as indicated in the picture

Figura 1: Esfera

(a) Mostre que $\mathbb{S}^2$ é uma variedade topológica, i.e., uma superfície.

(b) Mostre que $\mathbb{S}^2$ é homeomorfo à esfera redonda usual:

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1.\}$$

2. Seja $\mathbb{T}^2$ o torus, definido como o espaço quociente obtido identificando as fronteiras de um quadrado conforme a figura 2. Ou seja,

$$\mathbb{T}^2 = \{(x,y) \in I \times I\}/\sim$$

onde identificamos $(0,y) \sim (1,y)$, e $(x,0) \sim (x,1)$.

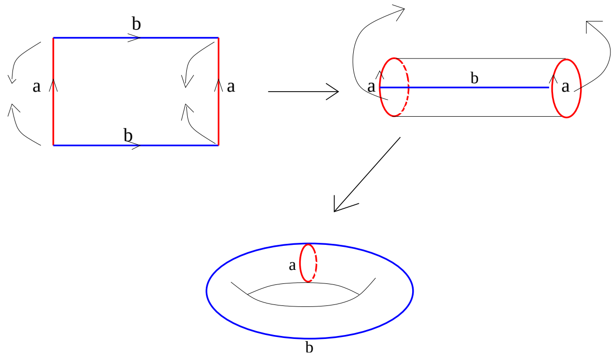



Figura 2: Torus

(a) Mostre que $\mathbb{T}^2$ é uma variedade topológica, i.e., uma superfície.

(b) Mostre que $\mathbb{T}^2$ é homeomorfo ao produto $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, onde $\mathbb{S}^1$ denota o círculo redondo:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1.\}$$

3. Seja $\mathbb{P}^2$ o plano projetivo, definido como o espaço quociente obtido identificando as fronteiras de um quadrado conforme a figura 3. Ou seja,

$$\mathbb{P}^2 = \{(x, y) \in I \times I\}/\sim$$

onde identificamos $(0, y) \sim (1, y)$, e $(x, 0) \sim (1 - x, 1)$.

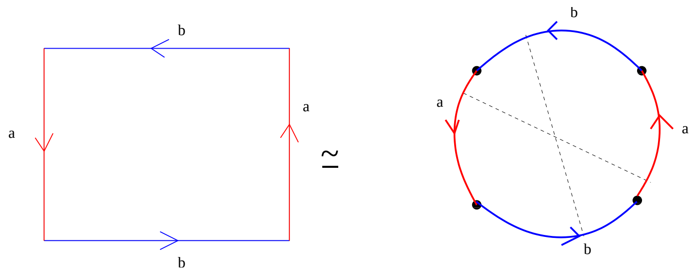



Figura 3: Plano Projetivo

Denote por $D \subset \mathbb{R}^2$ o disco fechado de raio 1.

(a) Mostre que $\mathbb{P}^2$ é homeomorfo ao espaço obtido identificando a fronteira $\partial D = \mathbb{S}^1$ de $D$ através da aplicação antípoda (Figura 4)

$$A : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1, \quad A(x, y) = (-x, -y).$$

(b) Mostre que $\mathbb{P}^2$ é homeomorfo ao espaço obtido identificando um ponto $p$ na esfera redonda padrão com seu anípoda $-p$.

(c) Mostre que $\mathbb{P}^2$ é homeomorfo ao espaço das retas que passam pela origem em $\mathbb{R}^3$. A topologia deste espaço de retas pode ser descrita como a topologia gerada pela seguinte base $\mathcal{B}$ de abertos: $U \in \mathcal{B}$ se e somente se existe $\theta \in [0, 2\pi]$ tal que para todo $\ell_1, \ell_2 \in U$, o ângulo entre $\ell_1$ e $\ell_2$ é menor que $\theta$.

(OBS: Uma descrição equivalente é tomar $\mathbb{R}^3 - 0/\sim$ onde $v \sim w$ se e somente se existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $v = \lambda w$ (prove isso!))

(d) Mostre que $\mathbb{P}^2$ é uma superficície.

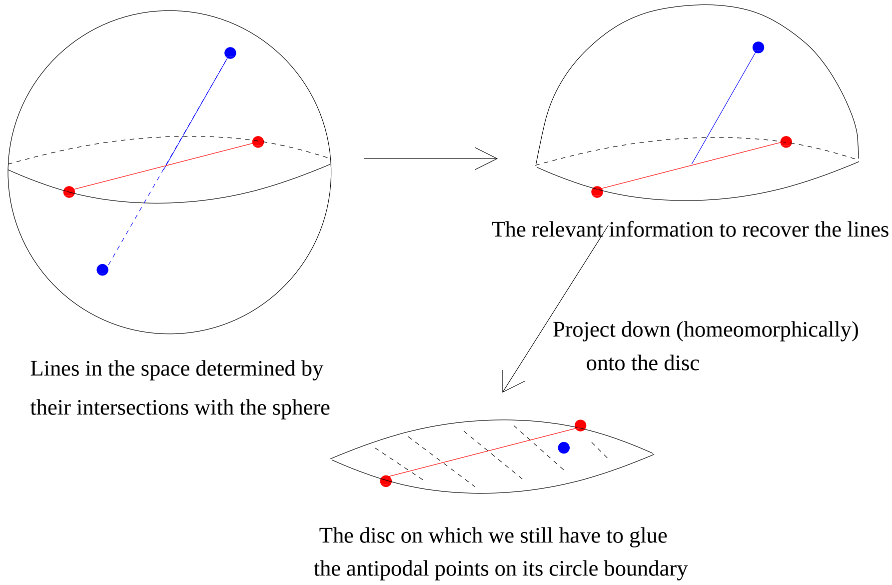



Figura 4: Plano Projetivo

4. Entenda a definição da soma conexa de duas variedades topológicas. (Procure em qualquer uma das referências para este curso, ou nas notas de aula disponibilizadas na referência 4)

5. (a) Seja $\Sigma$ uma superfcie qualquer. Mostre que $\Sigma \# \mathbb{S}^2$ é homeomorfo à $\Sigma$.

   (b) O mesmo é verdade para $M \# \mathbb{S}^n$, onde $M$ é uma variedade de dimensão $n$ qualquer?

6. Construa em $\mathbb{S}^3$, 3 campos de vetrores que sejam linearmente independentes em todos os pontos. (Dica: pense em $\mathbb{S}^3$ com os quaternions de norma 1)

7. Seja
$$\mathbb{CP}^n = \{\ell \subset \mathbb{C}^{n+1} : \ell \text{ é um subespaço com } \dim_{\mathbb{C}} \ell = 1\},$$
ou seja, $\mathbb{CP}^n$, o espaço projetivo complexo, é o espaço das retas complexas (dimensão real 2) de $\mathbb{C}^n$.

   (a) Mostre que $\mathbb{CP}^n = (\mathbb{C}^{n+1} - \{0\})/\sim$, onde $(z_0, \ldots, z_n) \sim (z'_0, \ldots, z'_n)$ se e somente se existe $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$ tal que $(z_0, \ldots, z_n) = (\lambda z'_0, \ldots, \lambda z'_n)$.

   (b) Mostre que $\mathbb{CP}^n$ é homeomorfo a um quociente de $\mathbb{S}^{2n+1}$ por uma ação de $\mathbb{S}^1$.

(c) Mostre que $\mathbb{CP}^n$ é uma variedade topológica de dimensão $2n$.

(d) Mostre que $\mathbb{CP}^1 \simeq \mathbb{S}^2$.

(e) Mostre que $\mathbb{CP}^n$ é obtido de $\mathbb{CP}^{n-1}$ colando uma $2n$-célula. (Veja a definição no exercício 17)

(f) Conclua que $\mathbb{CP}^n$ é simplesmente conexo para todo $n$. (Faça esse exercício depois da aula sobre o Teorema de Seifert - van Kampen)

# 2 Complexos CW

8. Seja $X$ um complexo ceular. Mostre que $X$ é compacto se e somente se o número total de células na decomposição celular é finito.

9. Exiba na figura uma decomposição celular para cada um dos seguintes espaços. Calcule o número de Euler.

(a) $X = \mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2$ (figura 5)

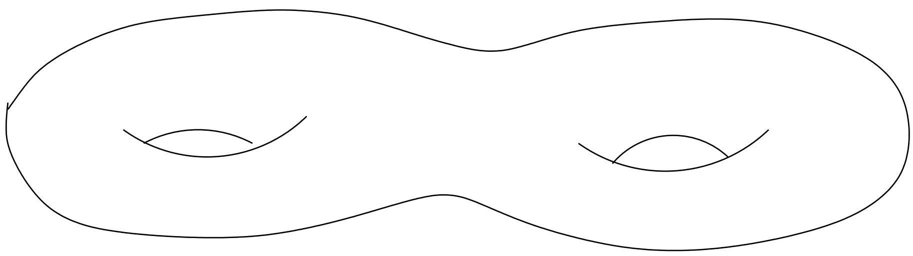


Figura 5: 2-Torus.

(b) $X = \mathbb{T}^2 \vee \mathbb{T}^2$ (figura 6)

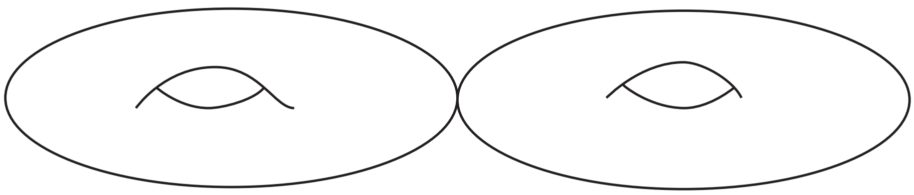


Figura 6: Produto Wedge $\mathbb{T}^2$ com $\mathbb{T}^2$.

(c) $X =$ colar de $n$ pérolas (figura 10). Aqui $X$ é o espaço obtido de $n$ esferas ($n \geq 3$), $\mathbb{S}^2_1, \ldots, \mathbb{S}^2_n$, tomando dois pontos distintos $p_i$ e $q_i$ em cada uma delas identificando $p_i \in \mathbb{S}^2_i$ com um de $q_{i+1} \in \mathbb{S}^2_{i+1}$ (para $i < n$), e $p_n \in \mathbb{S}^2_n$ com $q_1 \in \mathbb{S}^2_1$.

(d) $X = \mathbb{S}^2 \vee \mathbb{S}^2 \vee \mathbb{S}^2 \vee \mathbb{S}^2 \vee \mathbb{S}^1$ (figura 8)

(e) $X$ é um torus com quatro discos preenchidos (figura 9).

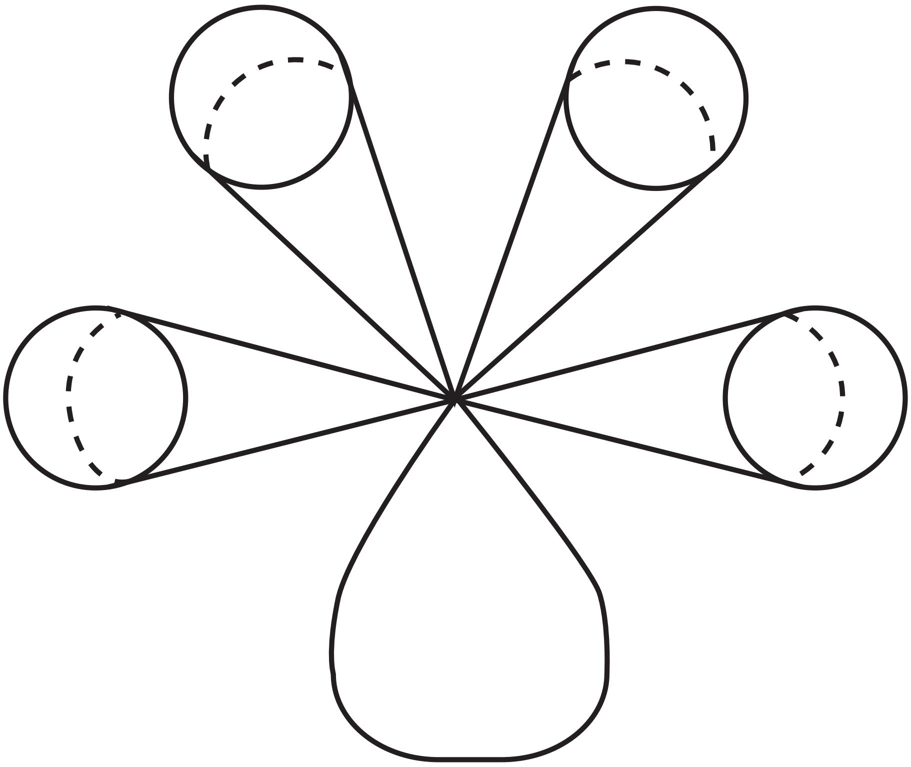


Figura 7: $X = \mathbb{S}^2 \vee \mathbb{S}^2 \vee \mathbb{S}^2 \vee \mathbb{S}^2 \vee \mathbb{S}^1$ .

10. (a) Mostre que se $\Sigma_1$ e $\Sigma_2$ são duas superfícies, então $\chi(\Sigma_1 \# \Sigma_2) = \chi(\Sigma_1) + \chi(\Sigma_2) - 2$
    (b) Calcule o número de Euler dos seguintes espaços:
        1. $\mathbb{S}^2$
        2. $\mathbb{T}^2_g = \mathbb{T}^2 \# \cdots \# \mathbb{T}^2$ ($g$ vezes)
        3. $\mathbb{P}^2_h = \mathbb{P}^2 \# \cdots \# \mathbb{P}^2$ ($h$ vezes)

11. Exiba uma decomposição celular de $\mathbb{P}^2$ com exatamente duas 0-células, 3 1-células e duas 2-células.

12. Estude o capítulo 0 do livro da Hatcher com ênfase em entender a demonstração da proposição 0.17.

# 3 Equivalência de Homotopia

13. (a) Mostre que todo espaço contrátil é conexo por caminhos.
    (b) Mostre que todo espaço convexo é contrátil.
    (c) Dê um exemplo de um espaço $X$ que é contrátil, mas não é convexo.
    (d) Mostre que $X$ é contrátil se e somente se $Id_X$ é homotópica à uma aplicação constante.

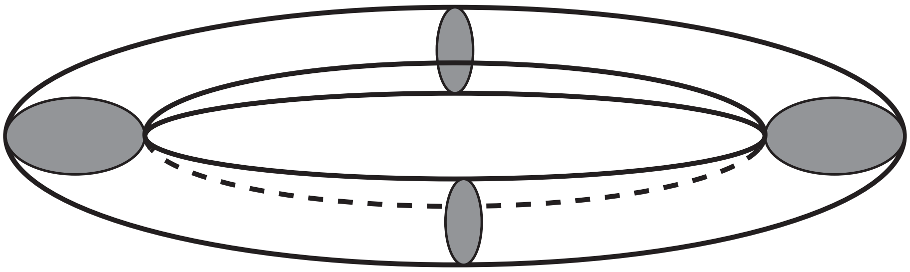


Figura 8: Torus com quatro discos preenchidos.

14. (a) Mostre que $Y$ é contrátil se e somente se quaisquer $f, g \in C(X, Y)$ são homotópicos (para todo espaço topológico $X$).
    (b) Mostre que $X$ é contrátil se e somente se quaisquer $f, g \in C(X, Y)$ são homotópicos (para todo espaço topológico conexo por caminhos $Y$). O que se pode dizer quando $Y$ não é conexo por caminhos?

15. Seja $X$ um espaço topológico e seja $Cil(X) = X \times I$ o cilindro sobre $X$. Mostre que $Cil(X)$ é homotopicamente equivalente à $X$.

16. Seja $Con(X) = Cil(X)/\sim$ onde $(x, t) \sim (y, s)$ se e somente se $(x, t) = (y, s)$ ou $t = s = 1$. Mostre que $Con(X)$ é contrátil.

17. Mostre que a letra "A"é homotópicamente equivalente á letra "O".

18. Mostre que o Torus com quatro discos preenchidos (figura 9) é homotopicamente equivalente à um colar de quatro pérolas (veja a figura 10)

    O colar de $n$ pérolas (figura 10). Aqui $X$ é o espaço obtido de $n$ esferas ($n \geq 3$), $\mathbb{S}^2_1, \ldots, \mathbb{S}^2_n$, tomando dois pontos distintos $p_i$ e $q_i$ em cada uma delas identificando $p_i \in \mathbb{S}^2_i$ com um de $q_{i+1} \in \mathbb{S}^2_{i+1}$ (para $i < n$), e $p_n \in \mathbb{S}^2_n$ com $q_1 \in \mathbb{S}^2_1$.

19. Seja $C = \mathbb{S}^1 \times I$.
    (a) Mostre que se $p = (x, t)$ com $t \neq 0$ e $t \neq 1$, então $C - \{p\}$ é homotopicamente equivalente à $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$.
    (b) Mostre que se $p = (x, t)$ com $t = 0$ ou $t = 1$, então $C - \{p\}$ é homotopicamente equivalente à $\mathbb{S}^1$.

20. Mostre que o espaço obtido removendo 2 pontos de $\mathbb{R}^n$ é homotopicamente equivalente à $\mathbb{S}^{n-1} \vee \mathbb{S}^{n-1}$.

21. (a) Sejam $p$ e $q$ dois pontos distintos da esfera $\mathbb{S}^n$. Mostre que $\mathbb{S}^n - \{p, q\}$ é homotopicamente equivalente á $\mathbb{S}^{n-1}$
    (b) Sejam $p_1, \ldots p_k$ pontos distintos da esfera $\mathbb{S}^n$. Mostre que $\mathbb{S}^n - \{p_1, \ldots, p_k\}$ é homotopicamente equivalente á $\mathbb{S}^{n-1} \vee \mathbb{S}^{n-1} \vee \cdots \vee \mathbb{S}^{n-1}$ ($k - 1$ vezes).

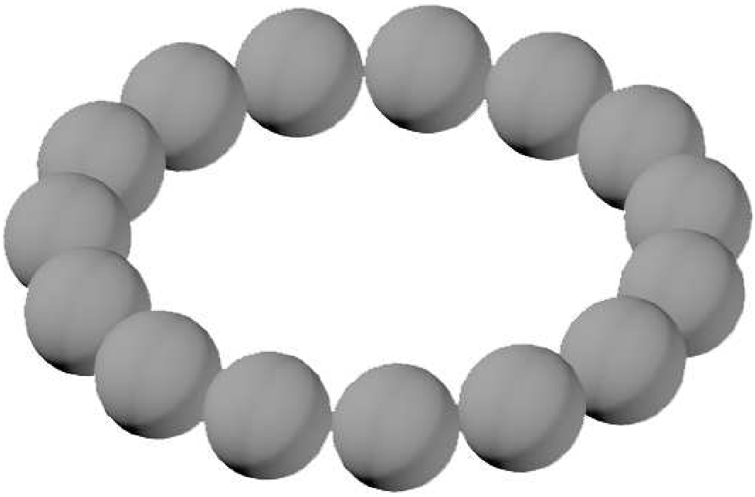


Figura 9: Colar de Pérolas.

22. Suponha que $X$ é obtido de $A$ colando uma $n$-célula. Mostre que se $x \in X - A$, então $i : A \to X - \{x\}$ é uma equivalencia de homotopia. (Escreva a prova de forma cuidadosa e detalhada!)

    OBS: $X$ é obtido de $A$ colando uma $n$-célula se existe uma aplicação contínua

    $$\varphi : \mathbb{S}^{n-1} = \partial D^n \to X$$

    (chamada a função de colagem) tal que $X$ é homeomorfo a $A \sqcup D^n / \sim$ onde $\varphi(p) \in A \sim p \in \mathbb{S}^{n-1} = \partial D^n$.

23. Seja $X$ um espaço topológico, e $A \subset X$ um subespaço. Mostre que existe uma retração $r : X \to A$ se e somente se para todo espaço $Y$ e toda aplicação contínua $f : A \to Y$ existe uma extensão contínua $\tilde{f} : X \to Y$.

24. Mostre que $\mathbb{R}^n - \mathbb{R}^k$ é homotopicamente à $\mathbb{S}^{n-k-1}$.

25. Seja $X$ um espaço conexo por arcos e $x \in X$. Mostre que o espaço

    $$P(X, x) = \{\alpha : I \to X : \alpha(0) = x\}$$

    é contrátil.

26. Considere os seguintes grupos clássicos:

    $$GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R}) : \det A \neq 0\}$$

$$GL^+(n,\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R}) : \det A > 0\}$$
$$O(n,\mathbb{R}) = \{A \in GL(n,\mathbb{R}) :< Au, Av >=< u, v >\}$$
$$SO(n,\mathbb{R}) = \{A \in O(n,\mathbb{R}) : \det A = 1\}$$
$$U(n) = \{A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C}) :<< Au, Av >>=<< u, v >>\}$$
$$SU(n) = \{A \in U(n) : \det A = 1\},$$

onde $< \ , \ >$ denota o produto escalar usual de $\mathbb{R}^n$, e $<< \ , \ >>$ denota o produto escalar hermiteano usual de $\mathbb{C}^n$.

Mostre que:

(a) $O(n,\mathbb{R})$ é homotopicamente equivalente à $GL(n,\mathbb{R})$. DICA: pense no processo de ortogonalização de Gram-Schmidt.

(b) $SO(n,\mathbb{R})$ é homotopicamente equivalente à $GL^+(n,\mathbb{R})$.

(c) $SO(n,\mathbb{R})$ é compacto, mas $GL^+(n,\mathbb{R})$ não é compacto.

(d) $SU(2)$ é homeomorfo à $\mathbb{S}^3$ e portanto é simplesmente conexo.

(e) $\mathbb{S}^3$ admite 3 campos de vetores $X_1, X_2, X_3$ que são linearmente independentes em todos os pontos.

(f) Existe um recobrimento de $SU(2)$ em $SO(3)$. Calcule o grupo fundamental de $SO(3)$.

(g) Mostre que $SO(3)$ é homeomorfo a $\mathbb{RP}^3$

(h) $U(n)$ é conexo por caminhos, mas $O(n,\mathbb{R})$ não é conexo.

27. Seja $n \geq 2$, e $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^2$ a projeção nas primeiras duas coordenadas (i.e., $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}^{n-2}$, e $\pi(u,v) = u$). Mostre que se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^2$ é uma função suficientemente pequena, então existe $x \in \mathbb{R}^n$, tal que $\pi(x) + f(x) = 0$ (em outras palavras, mostre que existe $\varepsilon > 0$ tal que para toda função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^2$ com $||f(y)|| < \varepsilon$ para todo $y \in \mathbb{R}^n$, existe $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $\pi(x) + f(x) = 0$).

Dica: Assuma que $\pi(x) + f(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Escreva $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}^{n-2}$, e para cada $v \in \mathbb{R}^{n-2}$ considere a aplicação

$$g_v : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1, \quad g_v(u) = \frac{u + f(u,v)}{||u + f(u,v)||}.$$

Mostre que $g_v$ é ao mesmo tempo homotópico à identidade e à uma aplicação constante. Utilize o exercício anterior.