Topologia Algébrica – Lista de Exercícios 2

1. Dados dois caminhos γ_1 e γ_2 de p à q em X, mostre que os homomorfismos associados
$$A_{\gamma_i} : \pi_1(X,p) \to \pi_1(X,q)$$
coincidem ($A_{\gamma_1} = A_{\gamma_2}$) se e somente se $[\gamma_1 * \gamma_2^{-1}]$ pertence ao centro de $\pi_1(X,p)$ (i.e., comuta com todos os elementos).

2. Mostre que $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ não são homeomorfos.

3. Dê um exemplo de uma função sobrejetora (respectivamente injetora) contínua de X em Y, tal que $f_\sharp : \pi_1(X,p) \to \pi_1(Y,q)$ não é sobrejetora (respectivamente injetora).

4. Mostre que uma retração sempre induz uma aplicação sobrejetora entre os grupos fundamentais.

5. Seja $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ e considere a aplicação
$$f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2, \quad f(e^{2\pi ix}, e^{2\pi iy}) = (e^{2\pi i(nx+my)}, e^{2\pi i(px+qy)}),$$
com $m, n, p, q \in \mathbb{Z}$.
   (a) Determine a aplicação induzida no grupo fundamental.
   (b) Mostre que f é homeomorfismo se e somente se é equivalência de homotopia.
   (c) Depermine para quais valores de m, n, p, q que f é um homeomorfismo.

6. (a) Mostre que existe um recobrimento do Torus $\mathbb{T}^2$ na garrafa de Klein K.
   (b) Mostre que K pode ser obtido de $\mathbb{R}^2$ como quociente por uma ação propriamente descontnua de um grupo.
   (c) Calcule o grupo fundamental de K.

7. Mostre que um recobrimento conexo $P : E \to B$ de um espaço 1-conexo B é um homeomorfismo.

8. Mostre que se $\tilde{B}$ é um recobrimento 1-conexo de um espaço B, e se E é um recobrimento (conexo) qualquer de B, então existe um recobrimento $p : \tilde{B} \to E$.

9. A esfera $\mathbb{S}^n$ pode ser obtida de $\mathbb{R}^n$ como quociente por uma ação propriamente descontínua de um grupo G? E o espaço projetivo real $\mathbb{P}^n$?

10. Seja $f_n : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ o recobrimento de n folhas $f_n(z) = z^n$. Decida para quais valores de m e n existe um levantamento de $f_m : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ para o recobrimento f_n (veja o diagrama abaixo).

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{S}^1 \arrow[d, "f_n"] \\ \mathbb{S}^1 \arrow[ur] \arrow[r, "f_m"'] & \mathbb{S}^1 \end{tikzcd}$$

11. Mostre que existe um recobrimento $p : \mathbb{T}_3 \to \mathbb{T}_2$ do 3-Torus $\mathbb{T}_3 = \mathbb{T}\#\mathbb{T}\#\mathbb{T}$ no 2-Torus $\mathbb{T}_2 = \mathbb{T}\#\mathbb{T}$. (Dica: procure uma ação propriamente descontínua de $\mathbb{Z}_2$ em $\mathbb{T}_3$). Observação: Note que isso mostra que $\pi_1(\mathbb{T}_3, x)$ e um subgrupo de $\pi_1(\mathbb{T}_2, y)$. Isto pode ser um pouco anti-intuitivo j que $\mathbb{T}_3$ "tem mais buracos que" $\mathbb{T}_2$.

12. Seja $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
    (a) Encontre uma ação propriamente descontínua de $\mathbb{Z}_n$ em $\mathbb{S}^3$.
    (b) Mostre que $L_n = \mathbb{S}^3/\mathbb{Z}_n$ é uma variedade topológica.

13. Mostre que existe um homomorfismo injetor $\pi(\mathbb{T}_{11}, x) \to \pi(\mathbb{T}_3, p)$, onde $\mathbb{T}_g$ a soma conexa de g Tori. (DICA: considere $\mathbb{T}_{11}$ como na figura 2).

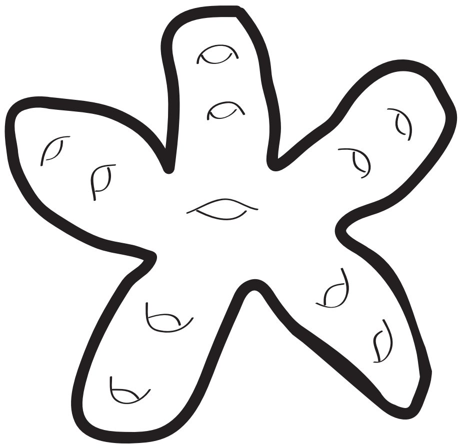

Figura 1: $\mathbb{T}_{11}$.