

1. Calcule as derivadas parciais de primeira e segunda ordem das seguintes funções:

(a) $f(x, y) = 3x^2 + 4xy^3 + 7y^3$

(b) $f(x, y) = e^{xy}$

(c) $f(x, y) = \sin(x) \cos(y)$

(d) $f(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^2)$

(e) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

(f) $f(x, y) = \sin(xy^2)$

(g) $f(x, y) = \cos(e^{x \sin y})$

(h) $f(x, y) = x^y$ com $x \neq 0$

(i) $f(x, y) = e^{x/y}$ com $y \neq 0$

(j) $f(x, y) = \sin(\cos(\sqrt{xy^2}))$ com $x \geq 0$.

2. Para as funções acima, encontre o vetor gradiente num ponto (x_0, y_0) . Calcule as derivadas direcionais de f no ponto $(1,1)$ nas direções dos seguintes vetores: $v_1 = (2, 3)$, $v_2 = (-1, 3)$, e $v_3 = \nabla f(1, 1)$.

3. Para as seguintes funções, determine o conjunto dos pontos onde a função é contínua, diferenciável, e de classe C^1 .

(a)

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(b)

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(c)

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(d)

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^4} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(e)

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^7}{x^2 + y^4} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(f)

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^4} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(g)

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 y^4}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(h)

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + xy^2 + x^2y + y^3}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(i)

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x - y} & \text{se } x \neq y \\ 2x & \text{se } x = y \end{cases}$$

(j)

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \cos\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

4. Determine os pontos críticos das seguintes função. Calcule a matriz Hessiana da função nos pontos críticos e determine se o ponto é de mínimo, máximo, sela, ou se o teste da Hessiana é inconclusível.

(a) $f(x, y) = x^2 - y^3$

(b) $f(x, y) = xy^2 - x$

(c) $f(x, y) = x^3 + 2xy^2$

(d) $f(x, y) = x^2 - 2xy - y^3$

(e) $f(x, y) = x^4 + x^2y + y^3$

(f) $f(x, y) = e^{xy}$

(g) $f(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^2)$

(h) $f(x, y) = \sin(xy)$

(i) $f(x, y) = e^{\cos(x+y)}$

(j) $f(x, y) = \frac{\sin x}{\cos y}$ com $-\pi/2 < y < \pi/2$

(k) $f(x, y) = \ln(1 + \sin^2(xy))$

5. Considere as seguintes regiões do plano:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, \quad -1 \leq y \leq 1\}$$

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1 - x\}$$

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \pi, \quad 0 \leq y \leq \sin x\}.$$

Para cada uma das funções do exercício 4, determine os pontos de máximo e mínimo globais de f nos conjuntos A, B, C e D .

6. Uma caixa de água (com tampa) em forma de paralelepípedo ortogonal (tipo um cubo, mas ao invés das faces serem quadradas, são retangulares) é construída para caber $1000m^3$ de água. Determine as dimensões x, y, z da caixa, de forma que o custo de produção seja mínimo.
7. Foi estudado o risco de morte de jovens de 18 à 25 anos, com renda mensal 700 e 5000 reais. Descobriu-se a seguinte correlação:

$$m(i, r) = \frac{(5000 - r)^2 i^2 + 1000}{100000((5000 - r)^2 + i^2)}$$

onde i representa a idade, e r é a renda mensal. Para este grupo de jovens, qual a idade e renda em que o risco de morte é o mais alto e qual o mais baixo?

8. Uma empresa fabrica dois produtos A e B, cujos preços de venda são respectivamente \$10,00 e \$6,00. O custo para produção

$$C(x, y) = 2x^2 + y^2 + xy,$$

onde x e y são as quantidades produzidas de A e B respectivamente. Quantas unidades de A e B devem ser produzidas para maximizar o lucro? E para minimizar o custo? (Obs: o lucro é obtido como a diferença entre a arrecadação total e o custo de produção total).