# MAT 3210 – Lista de Exercícios 1

1. Calcule as seguintes integrais:
   (a) $\int \text{sen}x\sqrt{\text{cos}x}dx$
   (b) $\int \frac{\ln x}{x}dx \quad \text{com } x > 0$
   (c) $\int \ln(x^2)dx \quad \text{com } x \neq 0$
   (d) $\int x\ln(x^3)dx \quad \text{com } x > 0$
   (e) $\int \ln x dx \quad \text{com } x > 0$
   (f) $\int x^2e^{x^3}dx$
   (g) $\int x^7\text{cos}(x^4)dx$
   (h) $\int \ln x dx$ com $x > 0$
   (i) $\int (\ln x)^2dx$ com $x > 0$
   (j) $\int e^x\sqrt{1+e^x}dx$
   (k) $\int x^5e^{x^3}dx$
   (l) $\int e^{-x}\text{cos}x dx$
   (m) $\int x^3\text{cos}x dx$

2. Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \leq 0 \\ \text{sen}x & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

   (a) Calcule $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$.
   (b) Encontre $a \in (-\infty, 0)$ tal que $\int_a^{\pi} f(x)dx = 0$

3. Calcule a área das seguintes regiões:
   (a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^3 - x \leq y \leq 1 - x^4\}$
   (b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq |x^2 - 1| \text{ com } -2 \leq x \leq 3\}$
   (c) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 4x \leq y \leq 2x\}$.

4. Explique (sem calcular a integral) por que

$$\int_{-e^{37}}^{e^{37}} |x - x^3|dx = 2\int_0^{e^{37}} |x - x^3|dx$$

5. Decida se a seguinte afirmação é verdadeira ou falsa. Justifique sua resposta.

$$\int 2^x dx = \frac{2^{x+1}}{x+1} + c$$

6. Calcule o volume dos sólidos obtidos rotacionando as seguintes regiões ao redor do eixo x:
   (a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 + x \leq y \leq 1 + \sqrt{x},\ \text{com } x \geq 0\}$.
   (b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq \ln x,\ \text{com } x \leq 2\}$.
   (c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq \cos x,\ \text{com } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\}$.
7. Calcule o volume dos sólidos obtidos rotacionando as seguintes regiões ao redor do eixo y:
   (a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2,\ \text{com } x \geq 0\}$.
   (b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq \cos(x^2),\ \text{com } 0 \leq x \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}}\}$.
   (c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 4, \quad y \geq x - 1 \text{ com } x \geq 0\}$.
8. Encontre a fórmula de uma integral que expressa a área da superfície de uma esfera.
9. Prove que se $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$, então
$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx.$$
10. Mostre que
$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$
11. Determine o domínio e a imagem das seguintes funções:
    (a) $f(x, y) = \text{tg}(xy)$.
    (b) $f(x, y) = \frac{1}{\text{sen}(x+y)}$.
12. Determine o domínio, a imagem, e as curvas de nível das seguintes funções. Faça um gráfico dos domínios:
    (a) $f(x, y) = \frac{1}{xy}$.
    (b) $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - y^2}}$.
    (c) $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x - y}$. Esboce o gráfico desta função.
    (d) $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. Esboce o gráfico desta função.
    (e) $f(x, y) = x^2 + y^2$. Esboce o gráfico desta função.
    (f) $f(x, y) = \sqrt{e^2 - x^2 - y^2}$. Esboce o gráfico desta função.
    (g) $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2}$.
    (h) $f(x, y) = e^{\frac{x}{y}}$.
    (i) $f(x, y) = \frac{|x|}{|y|}$.

13. Calcule os seguintes limites ou prove que eles não existem:

   (a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\operatorname{sen}(xy)x^2}{x^2+y^2}$

   (b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2xy^2}{x^2+y^2}$

   (c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2xy^2}{x^4+y^4}$

   (d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2x^2y^2}{x^4+y^4}$

   (e) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2x^2y^4}{x^4+y^4}$

   (f) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x+y}{x-y}$

   (g) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x}{x+y}$

   (h) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{e^x}{y}$

   (i) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} e^{\frac{x}{y}}$

   (j) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,2)} \dfrac{x^4}{|x^2-y^2|}$

14. Determine se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas. Justifique sua resposta:

   (a) A função

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(xy)x^2}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   é contínua em $(0,0)$.

   (b) A função

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2xy^2}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   é contínua em $(0,0)$.

   (c) A função

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2xy^2}{x^4+y^4} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   é contínua em $(0,0)$.

(d) A função

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2y^2}{x^4+y^4} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

é contínua em $(0,0)$.

(e) A função

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2y^4}{x^4+y^4} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

é contínua em $(0,0)$.

(f) A função

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y} & \text{se } x \neq y \\ 0 & \text{se } x = y \end{cases}$$

é contínua em $(0,0)$.

(g) A função

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x+y} & \text{se } x \neq -y \\ 0 & \text{se } x = -y \end{cases}$$

é contínua em $(0,0)$.

(h) A função

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x}{y} & \text{se } y \neq 0 \\ 0 & \text{se } y = 0 \end{cases}$$

é contínua em $(0,0)$.

(i) A função

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{x}{y}} & \text{se } y \neq 0 \\ 0 & \text{se } y = 0 \end{cases}$$

é contínua em $(0,0)$.