MAT134 – Prova Substitutiva

Nome: ____

Número USP: ____

Escolha 4 das questões abaixo para resolver. Indique CLARAMENTE qual questão não será corrigida. Caso você faça todas as questões eu só irei corrigir as 4 primeiras questões. Note que a nota máxima possível nesta prova é 12,0.

Justifique <u>TODAS</u> as suas respostas As justificativas são tão (ou mais) importantes do que as contas. Boa prova!

1. Seja V um espaço vetorial de dimensão n, $v_1, \dots, v_k, w \in V$ vetores não nulos.

   Para cada uma das questões abaixo, determine se a afirmação é verdadeira ou falsa. Caso seja verdadeira, demonstre a afirmação. Caso seja falsa, dê um contra exemplo.

   (a) (1 ponto) Se $v_1, \dots, v_k$ são linearmente independentes e w não pertence a espaço gerado por $v_1, \dots, v_k$ então necessariamente $v_1, \dots, v_k, w$ são linearmente independentes.

   (b) (1 ponto) Se $v_1, \dots, v_k$ são linearmente independentes, e $w \in V$ é tal que $v_1, \dots, v_k, w$ são linearmente dependentes, então necessariamente w pode ser escrito como combinação linear de $v_1, \dots, v_k$.

   (c) (1 ponto) Se $v_1, \dots, v_k$ são linearmente dependentes então necessariamente v_1 pode ser escrito como combinação linear de $v_2, \dots, v_k$.

2. Seja $V = P_2(\mathbb{R})$, e considere os seguintes subespaços de V

$$S_1 = \{p(t) \in P_2(\mathbb{R}) : p(1) + p(-1) = 0\}$$

$$S_2 = \{p(t) \in P_2(\mathbb{R}) : p(0) = 0)\}.$$

   (a) (1,5 ponto) Determine uma base e a dimensão de $S_1 \cap S_2$.

   (b) (1,5 ponto) Mostre que todo polinômio $p \in P_2(\mathbb{R})$ pode ser escrito como uma soma $p = q_1 + q_2$ onde $q_1 \in S_1$ e $q_2 \in S_2$.

3. Sejam V e W espaços vetoriais de dimensão finita e seja $T : V \to W$ uma aplicação linear. Decida se cada afirmação abaixo é verdadeira ou falsa. Justifique sua resposta com uma demonstração (para afirmação verdadeira) ou um contra-exemplo (para afirmação falsa).
   (a) (1,5 pontos) Se T é sobrejetora então $\dim V \geq \dim W$.
   (b) (1,5 pontos) Se $\dim V \leq \dim W$ então T é injetora.

4. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuja matriz na base canônica de $\mathbb{R}^3$ é dada por

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) (1 ponto) Calcule o polinômio caracterísitico de T.

(b) (2 pontos) Decida se T é diagonalizável. Justifique CLARAMENTE sua resposta. Caso seja diagonalizável, encontre uma base de $\mathbb{R}^3$ para a qual a matriz da transformação T seja diagonal e escreva a matriz de T nessa base.

DICA: $\lambda = -2$ é um autovalor da transformação T.

5. (3 pontos) Sejam $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$. Considere os subespaços $S_1 \subset \mathbb{R}^3$ e $S_2 \subset \mathbb{R}^2$ descritos abaixo

$$S_1 = [(a, c, e), (b, d, f)], \quad S_2 = [(a, b), (c, d), (e, f)].$$

Mostre que $\dim S_1 = \dim S_2$.

DICA: Pense na transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ cuja matriz na base canônica é dada por

$$A_T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix},$$

mostre que $S_1 = Im(T)$ e $S_2^{\perp} = N(T)$. Mostre que $\mathbb{R}^2 = S_2 \oplus S_2^{\perp}$ e use o que você sabe sobre a dimensão da soma direta de subespaços em função da dimensão dos subespaços e o Teorema do Núcleo e Imagem.