MAT134 – 2019 – Prova 2

Nome: ____

Número USP/Turma: ______________________________________

Resolva os exercícios abaixo. Justifique todos os passos das suas respostas! Boa Prova!

1. (3 pontos) Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear cuja matriz na base canônica é uma matriz simétrica, ou seja,

$$[T]_E = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

Mostre que T é diagonalizável. (Dica: Mostre que se $b \neq 0$ então T possui dois autovalores distintos.)

2. (3 pontos) Considere a aplicação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$T(x, y, z) = (y + 2z, -x - 2y - 2z, x + y + z).$$

Decida se T é diagonalizável ou não (justifique claramente sua resposta!). Caso seja diagonalizável, encontre uma base $\mathcal{F} = (f_1, f_2, f_3)$ de autovetores de T para $\mathbb{R}^3$ e escreva a matriz $[T]_{\mathcal{F}\mathcal{F}}$ de T na base $\mathcal{F}$.

(DICA: $t = -1$ é raíz do polinômio característico de T)

3. (3 pontos) Considere a aplicação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$T(x, y, z) = (4x - 5y + 2z, 2x - 3y + 2z, -3x + 3y - z).$$

Decida se T é diagonalizável ou não (justifique claramente sua resposta!). Caso seja diagonalizável, encontre uma base $\mathcal{F} = (f_1, f_2, f_3)$ de autovetores de T para $\mathbb{R}^3$ e escreva a matriz $[T]_{\mathcal{F}\mathcal{F}}$ de T na base $\mathcal{F}$.

(DICA: $t = 2$ é raíz do polinômio característico de T)

4. Sejam V e W espaços vetoriais de dimensão finita e seja $T : V \to W$ uma aplicação linear. Decida se cada afirmação abaixo é verdadeira ou falsa. Justifique sua resposta com uma demonstração (para afirmação verdadeira) ou um contra-exemplo (para afirmação falsa).
   (a) (1,5 pontos) Se T é injetora então $\dim V \leq \dim W$.
   (b) (1,5 pontos) Se $\dim V \geq \dim W$ então T é sobrejetora.