MAT134 – Prova 1

Nome: ____

Número USP: ____

Escolha 4 das quatro questões abaixo para serem resolvidas. Indique claramente quais questões devem ser corrigidas. Caso você escreva em todas as questões e não indique quais devem ser corrigidas eu irei considerar somente as 4 primeiras. Para que uma questão não seja corrigida risque a questão e escreva BEM GRANDE "Não Corrigir". Escolha bem quais questões você irá responder

Justifique <u>TODAS</u> as suas respostas. Boa prova!

1. Seja $V = P_2(\mathbb{R})$, e considere os seguintes subespaços de V

$$S_1 = \{p(t) \in P_2(\mathbb{R}) : p(1) = p(-1)\}$$

$$S_2 = \{p(t) \in P_2(\mathbb{R}) : p(-1) = 0)\}.$$

   (a) (1,5 pontos) Determine uma base e a dimensão de $S_1 \cap S_2$.

   (b) (1,5 pontos) Mostre que todo polinômio $p(t) \in P_2(\mathbb{R})$ pode ser escrito como uma soma $p = q_1 + q_2$ onde $q_1 \in S_1$ e $q_2 \in S_2$.

2. Considere a função dada por

$$T : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^4, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto (a+d, a+b+c, b+c+d, a)$$

   (a) (1 ponto) Mostre que T é uma transformação linear.

   (b) (2 pontos) Encontre uma base e a dimensão do núcleo de T (lembre que o núcleo de T é o subespaço $N(T) = \{A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : T(A) = 0\}$).

3. Considere os vetores $v_1 = (1, -1, 2, 1)$ e $v_2 = (-1, -1, 1, 1)$ do espaço vetorial $\mathbb{R}^4$.
   (a) (1 ponto) Mostre que v_1, v_2 são linearmente independentes.
   (b) (2 pontos) Complete v_1, v_2 para uma base de $\mathbb{R}^4$. Explique detalhadamente como você encontrou os vetores necessários para completar a base.

4. Seja V um espaço vetorial e $v_1, v_2, v_3, v_4 \in V$ vetores não nulos. Decida se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas. Justifique sua resposta com uma demonstração ou um contra-exemplo.

   (a) (1,5 pontos) Se v_1, v_2, v_3 são linearmente independentes e v_2, v_3, v_4 são linearmente dependentes, então v_1, v_4 são linearmente independentes.

   (b) (1,5 pontos) Se v_1, v_2, v_3 são linearmente independentes e v_2, v_3, v_4 são linearmente independentes, então v_1, v_2, v_3, v_4 são linearmente independentes.

5. Considere o espaço vetorial $V = P_3(\mathbb{R})$ e seja $B = (1, 2 - x, x^2 + 1, 1 + x + x^3)$.
   (a) (1 ponto) Mostre que B é uma base de $P_3(\mathbb{R})$.
   (b) (1 ponto) Encontre as coordenadas de x^3 na base B.